

LYON

Exercice n° 1

Enoncé

Grille

On écrit dans l'ordre les naturels de 0 à $n^2 - 1$, ($n \in \mathbf{N}^*$) dans un tableau C_n disposé comme dans C_4 ci-dessous.

1. On choisit, dans C_4 , quatre naturels de telle sorte qu'il n'y ait qu'un seul naturel dans chaque ligne et dans chaque colonne comme l'indique l'exemple ci-dessous.
 - (a) Quelle est la somme S_4 de ces nombres ?
 - (b) Combien y a-t-il de choix différents ?
 - (c) Montrez que, quel que soit le choix, la somme est constante.

12	13	14	15
8	9	10	11
4	5	6	7
0	1	2	3

2. On construit C'_4 à partir de C_4 en modifiant l'ordre des colonnes et on procède comme précédemment.
 - (a) La somme est-elle modifiée ? Expliquez la réponse.
 - (b) On construit alors C''_4 en modifiant l'ordre des lignes de C'_4 . La somme est-elle modifiée ? Expliquez la réponse.
3. On construit le carré γ , de 17 lignes et 17 colonnes de la même façon que précédemment en partant de 1 717 + 1 que l'on écrit à la place du zéro de C_{17} .
 - (a) Quel est le dernier entier naturel écrit ?
 - (b) On choisit 17 nombres dans γ , comme précédemment, de telle sorte qu'il n'y ait qu'un seul naturel dans chaque ligne et dans chaque colonne. Quelle est la somme S de ces nombres ?

4. Montrer que la somme S_n est constante dans le carré C_n et calculer S_n en fonction de n .

Solution élève

1.(a) $S_4 = 30$.

(b) On choisit une colonne parmi quatre dans la première ligne : il y a quatre choix.

On choisit une colonne parmi trois dans la deuxième ligne : il y a trois choix.

On choisit une colonne parmi deux dans la troisième ligne : il y a deux choix.

On choisit une colonne parmi une dans la quatrième ligne : il y a un choix.

Il y a donc : $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ choix différents.

(c) On peut réécrire le carré de la manière suivante

$12 + 0$	$12 + 1$	$12 + 2$	$12 + 3$
$8 + 0$	$8 + 1$	$8 + 2$	$8 + 3$
$4 + 0$	$4 + 1$	$4 + 2$	$4 + 3$
0	1	2	3

Comme on a choisi un nombre dans chaque ligne, on a choisi une fois 0, une fois 4, une fois 8 et une fois 12. Comme on a choisi un nombre dans chaque colonne, on a choisi une fois 0, une fois 1, une fois 2 et une fois 3. La somme est donc toujours :

$$(0 + 1 + 2 + 3) + (0 + 4 + 8 + 12) = 30$$

2.(a,b) Le fait de changer les colonnes ou les lignes de place ne modifie pas le choix d'une ligne et d'une colonne ; on ne modifie donc pas la somme.

3. (a)

$i = 16 :$	1990	1991	...	2006
	...	...	...	...
$i = 1 :$	1735	1736	...	1751
$i = 0 :$	1718	1719	...	1734

(b) La somme S est la somme S_{17} à laquelle on ajoute 17×1718 . En utilisant la même technique que dans la question 1)c) on obtient :

$$S_{17} = (0 + 1 + 2 + \dots + 16) + (0 + 17 + 2 \times 17 + \dots + 16 \times 17) = 2\,448$$

$$\text{Et donc : } S = 2448 + 1718 \times 17 = 31\,654$$

4. De la même façon, la somme S_n se calcule comme :

$$S_n = (0 + 1 + \cdots + n - 1) + (n + 2n + \cdots + n(n - 1)) = \frac{n(n^2 - 1)}{2}$$

Solution et généralisation

...en utilisant les systèmes de numération.

proposée par Gilbert Cros.

1. Ecrivons les naturels de C_4 en base quatre

3	30	31	32	33
2	20	21	22	23
1	10	11	12	13
0	00	01	02	03
	0	1	2	3

chaque nombre est repéré pas ses coordonnées (i, j) et s'écrit $\overline{ji}$ avec $(i, j) \in \{0, 1, 2, 3\}^2$.

On cherche donc $S_4 = \sum \overline{ji}$ avec i et j prenant une et une seule fois les valeurs 0, 1, 2, 3.

Ainsi $S_4 = (0 + 1 + 2 + 3)$ unités $+(0 + 1 + 2 + 3)(4 - \text{aines})$

$$S_4 = \overline{12} + \overline{120}$$

$$S_4 = \overline{132} \text{ (en base quatre)}$$

$$S_4 = 30 \text{ (en base dix).}$$

Les différents choix conduisent tous à la même somme puisque la somme des termes 0, 1, 2, 3 (en base quatre) est inchangée quand on les permute en raison de la commutativité de l'addition.

2. La transformation de C_4 en C'_4 ne change pas la somme S_4 puisque la condition portant sur $\overline{ji}$ reste la même. Même remarque concernant la transformation de C'_4 en C''_4 .

3. **Généralisation :** Calcul de S_n pour C_n .

On écrit les naturels de C_n en base n avec comme symboles des n « chiffres » : $[0], [1], [2], \dots, [n]$. Ainsi, tout nombre de C_n s'écrit sous la forme $\overline{[j][i]}$ avec $(i, j) \in \{[0], [1], [2], \dots, [n - 1]\}^2$.

On cherche donc $S_n = \sum \overline{[j][i]}$ avec i et j prenant une et une seule fois les valeurs $[0], [1], [2], \dots, [n - 1]$.

Ainsi

$$S_n = ([0] + [1] + \cdots + [n - 1])(\text{unités}) + ([0] + [1] + \cdots + [n - 1])(n - \text{aines}).$$

Puisque toute permutation des termes de la somme $[0] + [1] + [2] + \cdots + [n - 1]$ laisse cette somme inchangée en raison de la commutativité de l'addition, la

somme S_n est donc constante, que ce soit pour C_n , C'_n ou C''_n . Pour le calcul de S_n , on utilise par exemple les termes diagonaux puisqu'ils constituent un bon choix et qu'ils sont les n termes consécutifs de la suite arithmétique de premier terme 0, de raison $n+1$ et de dernier terme n^2-1 .

Ainsi, facilement, $S_n = \frac{n(n^2-1)}{2}$.

4. On remplace le carré par un cube γ , pour commencer, en écrivant les nombres de 0 à 26 en couches régulières, d'où les trois niveaux en partant du bas :

6	7	8
3	4	5
0	1	2

15	16	17
12	13	14
9	10	11

24	25	26
21	22	23
18	19	20

et l'on choisit trois naturels de telle sorte qu'il n'y ait qu'un seul nombre par niveau, rangée et colonne. Leur somme σ_3 est-elle constante ?

Si l'on écrit tous les naturels en base trois, on obtient dans le cube tous les nombres de trois chiffres écrits avec 0, 1, 2. Soit $\overline{kji}$ un tel nombre. Ainsi, par exemple :

lorsque $k=0$, on obtient les nombres du premier niveau,

lorsque $k=1$, on obtient les nombres du deuxième niveau,

lorsque $k=2$, on obtient les nombres du troisième niveau.

Ainsi $\sigma_3 = \sum \overline{kji}$ (en base trois) avec $(i, j, k) \in \{0, 1, 2\}^2$ et i, j, k prenant une et une seule fois les valeurs 0, 1, 2.

$$\begin{aligned}\sigma_3 &= (0+1+2)(\text{unités}) + (0+1+2)(\text{3-aines}) + (0+1+2)(\text{3}^2\text{-aines}) \\ &= \overline{10} + \overline{100} + \overline{1000} \\ &= \overline{1110} \text{ (en base trois)} \\ \sigma_3 &= 39 \text{ (en base dix)}.\end{aligned}$$

Si maintenant on considère le cube γ_n et que l'on procède comme ci-dessus :

$$\begin{aligned}\sigma_n &= ([0] + [1] + [2] + \cdots + [n-1]) (\text{unités}) \\ &\quad + ([0] + [1] + [2] + \cdots + [n-1]) (n\text{-aines}) \\ &\quad + ([0] + [1] + [2] + \cdots + [n-1]) (n^2\text{-aines})\end{aligned}$$

σ_n est constante pour la raison déjà vue et on la calcule en utilisant les termes diagonaux qui constituent un bon choix et qui sont les n termes consécutifs de la suite arithmétique de premier terme 0, de raison $n^2 + n + 1$ et de dernier terme $n^3 - 1$, d'où facilement : $\sigma_n = \frac{n(n^3 - 1)}{2}$.

Rien n'empêche de remplacer le cube y_n par un « hypercube d'arête 3 et de dimension p », et de ne plus rien voir !...

- Si $p = 4$, $\Sigma_4 = \sum \overline{hkji}$ avec $(i, j, k, h) \in \{0, 1, 2\}^4$ en prenant une et une seule fois les valeurs 0, 1, 2.

On trouve $\Sigma_4 = 120$ (base dix).

- Si p est quelconque, $\Sigma_p = \overline{11 \dots 10}$ (base trois, avec $p \ll 1$ »)

On trouve $\Sigma_p = \frac{3}{2}(3^p - 1)$ (en base dix).

Reste à généraliser avec un « hypercube d'arête q et de dimension p »...

On trouve $\Sigma(p, q) = \frac{q}{2}(q^p - 1)$.

On peut alors vérifier que l'hypercube d'arête 3 et de dimension 3 étant le cube γ_3 , on a bien $\Sigma(3, 3) = \sigma_3 = 39$.

De même, sachant que l'hypercube d'arête 4 et de dimension 2 est le carré C_4 (!), on vérifie que $\Sigma(2, 4) = S_4 = 30$...

5. Et maintenant, avec une grille de SUDOKU ?!...

Exercice n° 2

Énoncé

Les balles

Pour vendre ses balles de tennis *super-sport-compét* par lot de 4, un commerçant décide de les ranger dans des boîtes. Il a le choix entre des boîtes cylindriques, parallélépipédiques ou prismatiques comme indiqué sur le dessin ci-dessous.

Il souhaite, de plus, minimiser la surface du métal utilisé pour la confection de ces boîtes (couverture et fond compris). On assimilera une balle de tennis à une boule de rayon R .

1. Dessiner un patron de chacune des quatre boîtes.
2. Quelle boîte devra-t-il choisir ?

3. Classer les quatre emballages dans l'ordre croissant de surface de métal utilisé.
4. Un concurrent propose un autre modèle de boîte, noté S , en forme de parallélépipède rectangle contenant les quatre boules disposées en pile (trois boules tangentes deux à deux et posées sur la base et la quatrième posée sur les trois premières, comme indiqué sur le dessin ci-dessous. Où se place la boîte S dans la liste précédente ?



Cylindre

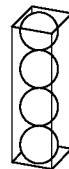
Modèle M

prisme à base
triangle équilatéral

Modèle H

Parallélépipède
base carrée

Modèle T

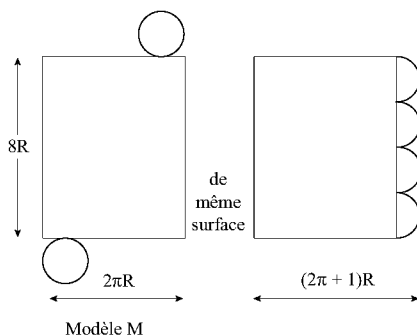
Parallélépipède
base carrée

Modèle A

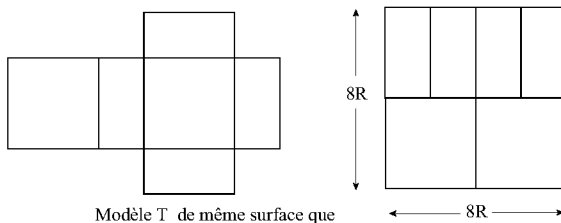
Modèle S

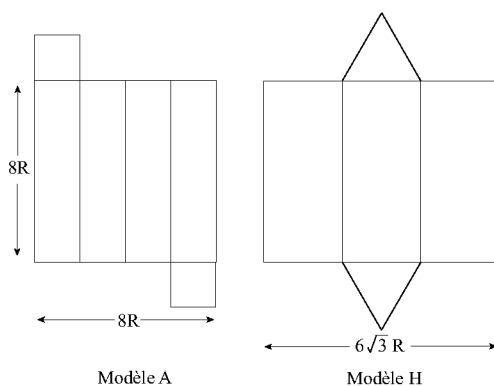
Solution

1. Les patrons sont reproduits ci-dessous.



Modèle M





Le modèle H mérite d'être plus détaillé.

La base est un triangle équilatéral et le rayon du cercle inscrit dans ce triangle est R .

Soit x le côté de ce triangle et h sa hauteur.

$$h = x \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } R = \frac{1}{3}h \text{ donc } x = 2R\sqrt{3}$$

(et l'aire du triangle équilatéral est $3R^2\sqrt{3}$).

2. Deux carrés de côté $4R$ et quatre rectangles de côtés $4R$ et $2R$ du modèle T peuvent se réorganiser en un côté de côté $8R$.

On pouvait donc comparer les aires « à vue d'œil » à condition d'avoir utilisé le même rayon pour chaque patron et remarquer que c'est le modèle M qui utilise le moins de métal.

3. Plus précisément :

La surface de métal nécessaire pour confectionner le modèle M est de : $18\pi R^2$.

La surface de métal nécessaire pour confectionner le modèle A est de : $72R^2$.

La surface de métal nécessaire pour confectionner le modèle T est de : $\pi R^2(10 + 8\sqrt{2})$.

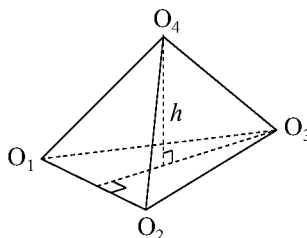
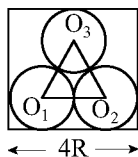
La surface de métal nécessaire pour confectionner le modèle H est de : $64R^2$.

La surface de métal nécessaire pour confectionner le modèle S est de : $54R^2\sqrt{3}$.

Les quatre emballages sont donc classés dans l'ordre MTAH...

4. Le triangle équilatéral formé par les centres des trois balles sur la base a comme côté $2R$ et comme hauteur $2R\frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$.

La base de la boîte est donc un rectangle dont les côtés mesurent $4R$ et $(\sqrt{3} + 2)R$.



Le tétraèdre régulier des quatre centres des balles a comme côté $2R$ et pour hauteur h avec : $h^2 + \left(\frac{2}{3} R\sqrt{3}\right)^2 = 4R^2$.

C'est-à-dire : $h = 2R \frac{\sqrt{6}}{3}$.

La hauteur de la boîte S est donc égale à $2R \frac{\sqrt{6}}{3} + 2R$.

On en déduit facilement l'aire de la boîte S : $(40 + 12\sqrt{3} + 4\sqrt{2} + 8\sqrt{6}) R^2$ soit environ $86,03 R^2$.

Dans le classement précédent, la boîte S se situe entre la boîte A et la boîte H.