

LIMOGES

Exercice n° 1

Énoncé

L'escargot

Un tapis extensible en caoutchouc mesure initialement 5 mètres de long. Un escargot a décidé de le parcourir entièrement. Chaque journée, l'escargot progresse d'un mètre. Mais chaque nuit, pendant que l'escargot se repose, le tapis s'allonge d'un mètre qui se répartit uniformément sur toute sa longueur. Au bout de combien de temps l'escargot parviendra-t-il au bout du tapis ?

Solution

Soit M_n la distance parcourue par l'escargot au matin du $n^{\text{ème}}$ jour.

Soit S_n la distance parcourue par l'escargot au soir du $n^{\text{ème}}$ jour.

Soit L_n la longueur du tapis pendant le $n^{\text{ème}}$ jour.

On a sans difficulté : $M_1 = 0$, $S_1 = 1$ et $L_1 = 5$, pour le premier jour. Et comme $S_1 < L_1$, l'escargot n'est ni au bout du tapis, ni au bout de ses peines.

Pendant la nuit du 1^{er} au 2^{ème} jour, le tapis s'allonge d'un mètre. Sa longueur est donc multipliée par $\frac{6}{5}$ puisqu'il passe de 5 mètres à 6 mètres. L'escargot est entraîné par ce mouvement pendant son sommeil, et la distance qui le sépare du début du tapis est donc aussi multipliée par $\frac{6}{5}$.

On a donc : $L_2 = L_1 + 1$, puis $M_2 = \frac{6}{5} \times S_1$ et $S_2 = M_2 + 1$.

Le jour suivant, le coefficient d'agrandissement sera de $\frac{7}{6}$, et ainsi de suite.

Ainsi, le coefficient d'agrandissement du jour $k - 1$ au jour k sera de $\frac{k+4}{k+3}$.

On aura donc :

$$L_n = n + 4$$

$$S_2 = \frac{6}{5} + 1, \text{ puis } S_3 = \frac{7}{6} \times \left(\frac{6}{5} + 1 \right) + 1 = \frac{7}{5} + \frac{7}{6} + 1 \text{ puis}$$

$$S_4 = \frac{8}{7} \times \left(\frac{7}{5} + \frac{7}{6} + 1 \right) + 1 = \frac{8}{5} + \frac{8}{6} + \frac{8}{7} + 1$$

$$\text{et par suite } S_n = \frac{n+4}{5} + \frac{n+4}{6} + \dots + \frac{n+4}{n+3} + 1.$$

L'inéquation à résoudre est donc :

$$\frac{n+4}{5} + \frac{n+4}{6} + \dots + \frac{n+4}{n+3} + 1 \geq n + 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+4}{5} + \frac{n+4}{6} + \dots + \frac{n+4}{n+3} + \frac{n+4}{n+4} \geq n + 4,$$

$$\text{soit } \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n+4} \geq 1.$$

Il n'y a plus qu'à additionner les inverses des entiers successifs à partir de 5 pour dépasser 1.

$$\text{On trouve : } \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{11} \approx 0,94 \text{ et } \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{12} \approx 1,02 > 1.$$

C'est donc au cours du 8^{ème} jour que l'escargot aura atteint la fin du tapis.

Autre solution : méthode purement numérique.

		Distance de l'escargot au point de départ	
jour	longueur du tapis	après la nuit	après le jour
1	5		1,00
2	6	1,20	2,20
3	7	2,57	3,57
4	8	4,08	5,08
5	9	5,71	6,71
6	10	7,46	8,46
7	11	9,30	10,30
8	12	11,24	12,24
en jours	en mètres		

Solution 3

Approche calculatrice proposée par A. Guillemot.

Soit k_n le coefficient d'agrandissement du jour $n - 1$ au jour n .

Du premier au deuxième jour le coefficient k_2 est de $\frac{6}{5}$.

Du deuxième au troisième jour le coefficient k_3 est de $\frac{7}{6}$.

Ainsi le coefficient k_n vaut $\frac{n+4}{n+3} = \frac{(n-1)+5}{(n-1)+4}$

Soit D_n la distance qu'il reste à parcourir à l'escargot le matin du $n^{\text{ième}}$ jour avant d'atteindre l'extrémité du tapis.

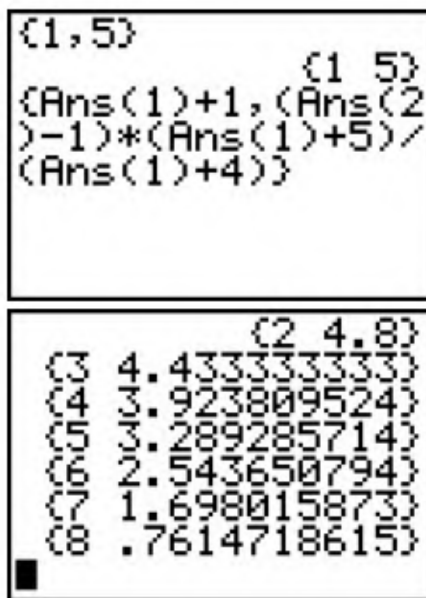
$$D_1 = 5, D_2 = (D_1 - 1) \times k_2, \dots, D_n = (D_{n-1} - 1) \times k_n.$$

Calcul de D_n en utilisant la commande ANS de la calculatrice.

On entre d'abord la liste initiale : $\{1, 5\}$

Ensuite la commande $\{Ans(1)+1, (Ans(2)-1) * (Ans(1)+5)/(Ans(1)+4)\}$

Il suffit ensuite d'appuyer sur la touche ENTER jusqu'à ce que la distance D_n soit inférieure à 1.



Au matin du huitième jour, il reste moins de 0,77 mètre à parcourir.
Donc l'escargot atteindra l'extrémité du tapis en huit jours.

Exercice n° 2

Enoncé

Le carré d'AS

On désigne par n un nombre entier strictement supérieur à 1, et on appelle mot une suite de n lettres (ayant un sens ou non).

Une grille carrée de n lignes et n colonnes sera appelée « grille $n \times n$ ».

On se propose alors de remplir les cases d'une grille $n \times n$ de telle sorte que chaque case contienne soit la lettre A, soit la lettre S.

Une fois remplie, cette grille contient :

- n mots écrits en ligne, lus de gauche à droite,
- n mots écrits en colonne, lus de haut en bas,
- 2 mots écrits en diagonale, lus de gauche à droite.

On dit que la grille est un " carré d'AS " lorsque les mots qu'elle contient sont tous différents.

Exemple : Ceci n'est pas un carré d'AS 5×5 car il existe au moins deux mots identiques.

A	S	A	S	A
S	A	A	S	A
A	A	A	A	A
S	S	A	S	S
S	S	S	S	S

AAASS

- 1- Montrer qu'il n'existe pas de **carré d'AS** dans une grille 2×2 .
- 2- Existe-t-il un **carré d'AS** dans une grille 3×3 ?
- 3- Donner un exemple de **carré d'AS** dans une grille 4×4 .

Solution

1 - Dans une grille 2×2 :

Il ne faut placer que des combinaisons de 2 lettres prises parmi A et S.

Elles sont au nombre de 4 : AA, AS, SA, SS.

Or il existe 2 lignes, 2 colonnes et 2 diagonales. Il faudrait donc 6 combinaisons.

Il n'existe donc pas de carré d'AS 2×2 .

2 - Dans une grille 3×3 :

Cette fois, il ne faut placer que des mots parmi : AAA, AAS, ASA, ASS, SAA, SAS, SSA, SSS (il y en a 8, c'est-à-dire autant que de mots à former. Il n'y a donc pas impossibilité flagrante).

Méthode 1 : La case centrale occupe une position stratégique. On peut lui affecter indifféremment la lettre A ou la lettre S, qui jouent des rôles symétriques. Affectons-lui la lettre A.

Puisqu'il existe exactement 4 mots avec A pour lettre centrale et 4 mots avec

S pour lettre centrale, les 4 autres cases qu'occupent les lettres centrales des mots devront contenir la lettre S, conformément au schéma :

	S	
S	A	S
	S	

Le mot SAS apparaît nécessairement deux fois, donc il n'existe pas de carré d'AS 3×3 .

Méthode 2 : (vue dans des copies) Les mots SSS et AAA ne peuvent pas « se croiser ». Ils occupent donc deux lignes parallèles (ou colonnes). De sorte qu'il ne reste plus qu'une ligne (ou colonne) pour différencier ces mots, soit 3 cases. Comme on ne dispose que de 2 symboles, c'est impossible.

3 - Dans une grille 4×4 :

Il existe 16 mots distincts de 4 lettres formés avec les lettres A et S. On doit former $4 + 4 + 2 = 10$ mots.

Y compris les inversions entre A et S, les symétries et les rotations, il existe 652 solutions.

Il n'est possible de placer qu'entre 6 et 10 fois sur 16 la même lettre.

Avec 6 A et 10 S (ou l'inverse), il existe 104 solutions.

Avec 7 A et 9 S (ou l'inverse), il existe 352 solutions.

Avec 8 A et 8 S, il existe 196 solutions.

Les mots AAAA et SSSS apparaissent 480 fois.

Les mots AAAS et SSSA apparaissent 848 fois.

Les mots AASA et SSAS apparaissent 848 fois.

Les mots AASS et SSAA apparaissent 888 fois.

Les mots ASAA et SASS apparaissent 848 fois.

Les mots ASAS et SASA apparaissent 888 fois.

Les mots ASSA et SAAS apparaissent 872 fois.

Les mots ASSS et SAAA apparaissent 848 fois.

Il existe 28 solutions où apparaissent simultanément AAAA et SSSS, et c'est toujours sur les diagonales qu'on les trouve dans ce cas de figure. Exemples :

A	A	S	S
S	A	S	S
S	S	A	S
S	A	A	A

A	S	S	S
A	A	S	A
A	S	A	S
S	S	S	A

S	A	A	A
S	S	A	S
S	A	S	A
A	A	A	S

Palmarès

Premier prix : CASSAGNE Nathalie - Lycée Gay Lussac - LIMOGES

Deuxième prix : DUCHAMBON Marie - Lycée St Jean - LIMOGES

Troisième prix : DUCHEZ Marie - Lycée Pierre Bourdan - GUERET

Quatrième prix : FOURTUNE Llisa - Lycée Gay Lussac - LIMOGES.