

LILLE

Exercice n° 1

Enoncé

La bonne boîte

Antoine possède un nombre N , N supérieur à 10, de boîtes qu'il a numérotées dans l'ordre de 1 à N . Il possède également 2006 jetons numérotés dans l'ordre de 1 à 2006. Il décide de déposer les jetons dans les différentes boîtes :

Le jeton 1 dans la boîte 1, le jeton 2 dans la boîte 2, ..., le jeton N dans la boîte N . Il continue en plaçant le jeton $N + 1$ dans la boîte $N - 1$, le jeton $N + 2$ dans la boîte $N - 2$, ..., le jeton $2N - 1$ dans la boîte 1, puis le jeton $2N$ dans la boîte 2, etc.

Il va donc alternativement de la boîte 1 à la boîte N puis de la boîte N à la boîte 1.

A la fin, il constate que les jetons 847, 863 et 1473 sont dans la même boîte.

Dans quelle boîte se trouve le jeton 2006 ?

Solution

Remarques préliminaires : Les jetons déposés dans la boîte 1 portent un numéro de la forme $q(N - 1) + 1$ avec q pair et les jetons déposés dans la boîte N portent un numéro de la forme $q(N - 1) + 1$ avec q impair.

Soit k le numéro de la boîte où sont déposés les jetons 847, 863 et 1473.

$863 - 847 = 16 < 20$ donc, après avoir placé le jeton 847 dans la case k , aucun autre jeton n'y a été déposé avant d'y placer le jeton 863. $863 - 855 = 855 - 847$ donc le jeton 855 est soit dans la boîte 1, soit dans la boîte N . Par conséquent le nombre 854 s'écrit $q(N - 1)$, c'est-à-dire que $N - 1$ est un diviseur de 854. Les diviseurs de 854 sont 1, 2, 7, 14, 61, 122, 427 et 854. Compte tenu de la condition $N > 10$, il n'y a que 5 cas possibles. Notons que si q est pair, le jeton 855 est dans la boîte 1, sinon il est dans la boîte N .

Si on appelle a le numéro du jeton, q le quotient et r le reste de la division de

a par $N - 1$ et k le numéro de la boîte où est déposé le jeton a , on déduit :

si q pair et r différent de 0, alors $k = r$, si q pair et $r = 0$, alors $k = 2$
 si q impair et r différent de 0, alors $k = N + 1 - r$, si q impair et $r = 0$, alors
 $k = N - 1$.

Le tableau ci-dessous donne les différentes possibilités :

$N - 1$	14	61	122	427	854
q	61	14	7	2	1
N	15	62	123	428	855
Boîte où est placé le jeton 855	15	1	123	1	855
$(q; r)$ dans la division de 847 par $N - 1$	(60; 7)	(13; 54)	(6; 115)	(1; 420)	0; 847)
Boîte où est placé le jeton 847	7	9	115	9	847
$(q; r)$ dans la division de 847 par $N - 1$	(61; 9)	(14; 9)	(7; 9)	(2; 9)	(1; 9)
Boîte où est placé le jeton 863	7	9	115	9	847
$(q; r)$ dans la division de 1473 par $N - 1$	(105; 3)	(24; 9)	(12; 9)	(3; 192)	(1; 619)
Boîte où est placé le jeton 1473	13	9	9	237	237

Le seul cas possible correspond à $N = 62$, il y a 62 boîtes et les jetons 847, 863 et 1473 sont dans la boîte 9. Comme $2006 = 61 \times 32 + 54$, on en déduit que le jeton 2006 est dans la boîte 54.

Exercice n° 2

Enoncé

La toile d'araignée

Soit ABC un triangle et G son centre de gravité. On désigne par A' , B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Les points P, Q, R, S, T et U sont les centres de gravité respectifs des triangles GAC' , GBC' , GBA' , GCA' , GCB' et GAB' .

Justifier l'égalité : $PQ + QR + RS + ST + TU + UP = PS + QT + RU$.

Calculer l'aire de l'hexagone $PQRSTU$ en fonction de celle du triangle ABC .

Solution

La construction de la figure permet d'introduire naturellement les points I, J, K, L, M et N respectivement milieux des segments $[AC']$, $[C'B]$, $[BA']$, $[A'C]$, $[CB']$ et $[C'A]$. L'hexagone $PQRSTU$ est l'homothétique de l'hexagone

$IJKLMN$ dans l'homothétie de centre G et de rapport $\frac{2}{3}$.

Le segment $[IN]$ est l'homothétique du segment $[BC]$ dans l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{4}$; d'autre part $KL = \frac{1}{2}BC$, donc $IN + KL = \frac{3}{4}BC$.

De la même façon, $JK + MN = \frac{3}{4}CA$ et $LM + IJ = \frac{3}{4}AB$.

Le périmètre de l'hexagone $IJKLMN$ est donc égal aux $\frac{3}{4}$ de celui du triangle ABC .

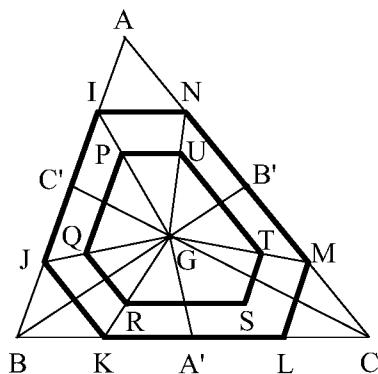
Le segment $[JM]$ est l'homothétique du segment $[BC]$ dans de rapport $\frac{3}{4}$; donc $JM = \frac{3}{4}BC$.

De même, $KN = \frac{3}{4}AB$ et $LI = \frac{3}{4}CA$.

On dispose donc de l'égalité $IJ + JK + KL + LM + MN + NI = IL + KN + MJ$, d'où $PQ + QR + RS + ST + TU + UP = PS + QT + RU = \frac{1}{2}(AB + BC + CA)$.

Les triangles AIN , BKJ et CML , homothétiques de ABC dans le rapport $1/4$, ont même aire, $\frac{1}{16}$ de celle de ABC . L'aire de l'hexagone $IJKLMN$ est

donc les $\frac{13}{16}$ de celle de ABC et l'aire de l'hexagone $PQRSTU$, homothétique du précédent dans le rapport $\frac{2}{3}$, est donc les $\frac{4}{9}$ de son aire, c'est-à-dire les $\frac{13}{16} \times \frac{4}{9}$, soit $\frac{13}{36}$, de l'aire de ABC .



Palmarès

Les trois premiers prix :

Premier prix : VANBESIEEN Vincent ; Lycée Henri Wallon - Valenciennes

Deuxième prix : KMIECIAK Lucas ; Lycée Condorcet - Lens

Troisième prix : DELAY Laurent ; Lycée Saint Paul - Lens.