

La GUADELOUPE

Exercice n° 1

Enoncé

Transports en commun

Un groupement de 6 villes peut-il organiser entre celles-ci un réseau de transport en commun par car répondant aux critères suivants :

- chaque car visite 3 villes
- pour aller de n'importe quelle ville à n'importe quelle autre ville on a le choix entre exactement deux cars
- deux cars différents ont des circuits différents.

Solution

Désignons les six villes par les lettres A , B , C , D , E et F . Un car sera représenté par un ensemble de trois lettres distinctes prises parmi ces six lettres. Chaque ensemble de trois lettres détermine trois paires de lettres différentes.

Comme chacune des 15 paires doit intervenir deux fois, il y aura : $\frac{2}{3} \times 15 = 10$ circuits de cars.

Si on désigne par ABC et ABD les deux circuits passant par A et B , alors aucun des deux circuits passant par C et D ne peut passer par A ou par B . En effet, si par exemple, il y avait les trois circuits ABC , ABD et ACD parmi les paires contenant A il resterait à utiliser deux fois la paire AE et deux fois la paire AF , ce qui ne serait possible que dans AEF qu'il faudrait compter deux fois et cela est exclu par la troisième condition.

Les deux circuits passant par C et D ne peuvent être que CDE et CDF .

De même, les deux circuits passant par E et F seront AEF et BEF .

Les quatre circuits encore à déterminer doivent utiliser une fois et une seule les douze paires de lettres autres que AB , CD et EF (qui ont déjà été utilisées deux fois).

Le deuxième circuit passant par A et C doit contenir E ou F (D est exclu puisque C et D sont déjà reliées par deux cars). Comme les lettres E et F sont déjà intervenues symétriquement, on peut choisir d'appeler E celle qui se trouve sur le deuxième circuit joignant A et C . On a ainsi les circuits ABC , CDE , AEF , BEF , ACE .

On termine la liste, en regardant les paires disponibles, par ADF , BCF et BDE sans nouveau choix possible. Au choix près du nom des villes, la solution est unique.

Exercice n° 2

Enoncé

Une égalité oubliée

a, b, c et h désignent respectivement les mesures de l'hypoténuse, des côtés de l'angle droit et de la hauteur d'un triangle rectangle ABC .

- 1°) Démontrer que l'on a : $\frac{b^3 + c^3}{b^2 + c^2} = (b + c) \frac{a - h}{a}$
- 2°) Etant donnés deux segments de mesures b et c , montrer que l'on peut toujours construire graphiquement un segment de mesure x donnée par :
- $$x = \frac{b^3 + c^3}{b^2 + c^2}.$$

Solution

- 1°) Démontrons que :

$$\frac{b^3 + c^3}{b^2 + c^2} = (b + c) \frac{a - h}{a}$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{b^3 + c^3}{b^2 + c^2} &= \frac{(b + c)(b^2 + c^2 - bc)}{b^2 + c^2} \\ &= (b + c) \left(1 - \frac{bc}{b^2 + c^2} \right) \end{aligned}$$

or on a : $b^2 + c^2 = a^2$ (Pythagore dans le triangle rectangle ABC)

et $bc = ah$ (en exprimant l'aire du triangle ABC de deux façons) d'où :

$$\frac{b^3 + c^3}{b^2 + c^2} = (b + c) \left(1 - \frac{ah}{a^2} \right)$$

$$\frac{b^3 + c^3}{b^2 + c^2} = (b + c) \left(1 - \frac{h}{a} \right)$$

$$\frac{b^3 + c^3}{b^2 + c^2} = (b + c) \frac{a - h}{h}$$

2°) **Construction.** On doit construire la longueur $x = \frac{b^3 + c^3}{b^2 + c^2}$

$$x = (b + c) \frac{a - h}{h} \text{ (d'après ce qui précède)}$$

$$\text{ou } \frac{x}{b + c} = \frac{a - h}{a}.$$

Ce qui donne l'idée de la construction suivante :

On construit un triangle rectangle ABC rectangle en A , de côtés de l'angle droit b et c . On prolonge le côté $[CA]$ de la longueur $AB' = AB = c$ et on trace la hauteur (AH) .

On joint B et B' , on place sur le segment $[BC]$ le point D tel que $BD = AH$ et l'on mène par D la parallèle à la droite (BB') . Elle coupe le segment $[CA]$ en un point M et $[CM]$ est le segment cherché.

En effet :

$$\frac{CM}{b + c} = \frac{CB - BD}{CB} = \frac{CB - AH}{CB} = \frac{a - h}{a}$$

$$\text{d'où : } CM = (b + c) \frac{a - h}{a} = x.$$

La construction est toujours possible quels que soient b et c puisque l'on a $AH = BD$, $BD < BC$ et par suite $CD = CB - BD = a - h$.

