

GRENOBLE

Exercice n° 1

Énoncé

1. Déterminer le plus grand entier k tel que 3^k divise le produit $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 28 \times 29$ de tous les entiers de 1 à 29.
2. Même question dans le cas du produit $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 2005 \times 2006$ de tous les entiers de 1 à 2006.

Solution - Henri Bareil

La question 1 doit servir de lieu de recherche pour, ensuite, transposer à la question 2.

(Si la question 2 avait été donnée d'emblée, il aurait été conseillé d'étudier d'abord un tel énoncé « réduit »).

Il s'agit de comptabiliser les diviseurs 3 possibles, étant entendu que, dès qu'un facteur est divisible par 3, le produit l'est aussi. Or :

- a) le facteur 3 et tous ses multiples sont divisibles par 3. Ces facteurs interviennent dans des « paquets » successifs de trois facteurs consécutifs : (1 ; 2 ; 3), (4 ; 5 ; 6), etc.

Le nombre de ces « paquets » est le quotient euclidien de la division de 2006 par 3, soit $\left\lfloor \frac{2006}{3} \right\rfloor$ (partie entière de $\frac{2006}{3}$).

- b) mais le facteur 9 (i.e. 3^2) et ses multiples rendent possibles d'autres divisions par 3. Ils interviennent par paquets successifs de neuf facteurs consécutifs :

(1 ; ... ; 9), (10 ; ... ; 18), etc. Le nombre de ces paquets est $\left\lfloor \frac{2006}{9} \right\rfloor$

- c) mais le facteur 3^3 et ses multiples rendent possibles d'autres divisions par

3. On les prouve par paquets de 3^3 . Le nombre de paquets est $\left\lfloor \frac{2006}{3^3} \right\rfloor$.

- d) etc ! jusqu'à la puissance de 3 immédiatement inférieure à 2006.

Or $2^6 < 2006 < 2^7$. Or

Conclusion

Pour 29, le nombre de diviseurs 3 est $\left\lfloor \frac{29}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{29}{9} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{29}{27} \right\rfloor = 9 - 3 - 1 = 13$

Pour 2006, il est de $\sum \left\lfloor \frac{2006}{3^n} \right\rfloor$, n , entier variant de 1 à 6.

On trouve 998.

COMPLÉMENT

On pourrait associer d'autres diviseurs. Par exemple chercher le plus grand entier k tel que 12^k divise $2006!$ (utiliser $12 = 4 \times 3$), etc.

Exercice n° 2

Enoncé

Les deux hélices

 Sur ce modèle réduit, la distance entre les axes des deux hélices de même longueur et qui tournent dans un même plan est supérieure à la longueur d'une hélice. Les hélices peuvent tourner de façon indépendante sans se heurter.	 Cette fois, la distance entre les axes des deux hélices est inférieure à la demi-longueur d'une hélice. Les hélices vont nécessairement se heurter.
 Et si la distance entre les axes des deux hélices est comprise entre la demi-longueur et la longueur d'une hélice ? Il s'agit, dans cet exercice, de savoir, dans un cas particulier, s'il est possible de faire tourner les deux hélices dans le même sens et à la même vitesse sans qu'elles se heurtent.	

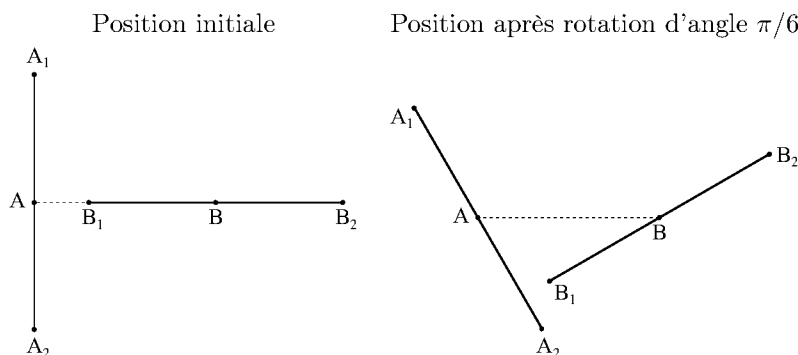
On modélise la situation de la façon suivante.

L'unité est le centimètre. A et B sont deux points tels que $AB = 10$. Deux segments $[A_1A_2]$ et $[B_1B_2]$ de longueur 14 ont pour milieux respectifs A et B . Leur position initiale est indiquée ci-dessous ($[B_1B_2]$ est inclus dans la droite

(AB) et $[A_1A_2]$ est perpendiculaire à (AB)).

On les fait pivoter autour de leurs centres d'un même angle orienté (voir la figure ci-dessous à droite qui illustre un cas particulier).

1. Quel est l'ensemble des positions du point d'intersection H des droites (A_1A_2) et (B_1B_2) quand les segments pivotent ?
2. Les deux segments vont-ils se toucher ?



Solution

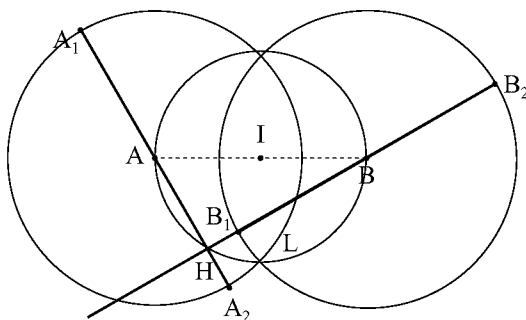
On montre que les droites restent perpendiculaires, le lieu H est donc le cercle de diamètre $[AB]$.

Par ailleurs, B_1 et A_2 décrivent des cercles de centre A et B .

Dire que les deux segments se touchent, c'est dire que H peut se trouver à une distance de A inférieure ou égale à $0,35$ et à une distance de B inférieure ou égale à $0,35$, ce qui revient à dire que H peut se trouver à l'intérieur des deux cercles de centres respectifs A et B et de rayon $0,35$.

Il reste à justifier que les points d'intersection L et L' de ces deux cercles sont des points intérieurs au cercle de diamètre $[AB]$ pour conclure que ce n'est pas possible.

Les deux segments peuvent donc pivoter librement (la longueur « limite » est ici $10\sqrt{2}$).



Palmarès

Comme en 2005, les membres du jury ont décidé d'établir deux classements en fonction des programmes enseignés. Pour distinguer les lauréats, le jury a adopté les critères suivants :

A : exercice résolu avec une argumentation complète et correcte ;

B : exercice résolu, mais l'argumentation n'est pas complète ;

C : de bonnes idées, mais résolution inachevée ;

D : autres cas.

séries S et STI

Cette année, il est ressorti quatre copies d'élèves auxquels il a été décidé d'attribuer un prix.

Le premier a résolu correctement les quatre exercices.

Le jury lui a attribué le **premier prix**.

Il s'agit de

SCELLIER Benjamin ; Lycée Pierre Beghin - Moirans (38).

Le second a résolu correctement les trois premiers exercices, mais, dans le quatrième, l'argumentation n'est pas complète.

Le jury lui a attribué le **deuxième prix**.

Il s'agit de

PASCAL Aurélien ; lycée Alain Borne-Montélimar (26).

Le troisième a résolu correctement trois exercices, mais n'a pas résolu le quatrième.

Le jury lui a attribué le **troisième prix**.

Il s'agit de

JUNG Sébastien ; Lycée Champollion - Grenoble (38).

Le quatrième a résolu trois exercices mais, dans l'un d'entre eux, l'argumentation n'est pas tout à fait complète.

Le jury lui a attribué le **quatrième prix**.

Il s'agit de

BRUN Léopold ; Lycée Vincent d'Indy - Privas (07).

Trois autres élèves qui ont été classés ex-aequo ont obtenus **un accessit**.

Il s'agit de

BELLOSGUARDO Guillaume ; Lycée Pierre Termier - Grenoble (38)

THEVENEAU Hadrien - Lycée Pierre Termier - Grenoble (38)

FAUVARQUE Claire ; Lycée Pierre Termier - Grenoble (38)

séries autres que S et STI

Cette année, dans les séries autres que S et STI, il est ressorti une copie d'élève auquel il a été décidé d'attribuer un prix. Il a résolu correctement l'un des exercices, la résolution d'un second étant inachevée.

Il s'agit de

COURBON Geoffrey ; Lycée Notre Dame des Victoires - Voiron (38).