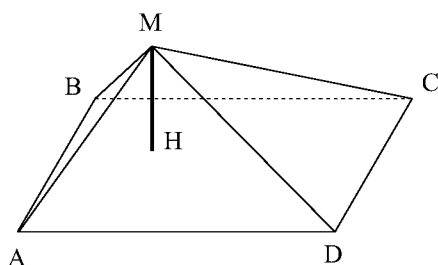


# DIJON

## Exercice n° 1

### Enoncé

#### Sur le toit



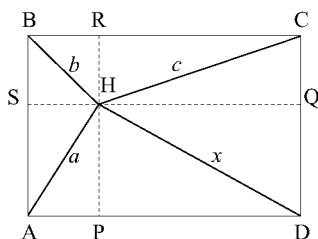
Un radio amateur place un mât d'antenne sur le toit rectangulaire de son garage à l'endroit où il fournit la meilleure réception. (On suppose que le mât est orthogonal au plan du toit). Il fixe alors ce mât par des câbles rectilignes en fil de fer qui vont de la cime jusqu'aux quatre coins du toit selon le schéma ci contre. Sur ces quatre câbles,

deux câbles non consécutifs mesurent 7 mètres et 4 mètres, un troisième mesure 1 mètre.

Quelle est la longueur du dernier câble ?

### Solution

Notons  $A, B, C, D$  les sommets du rectangle,  $M$  le sommet du mât,  $H$  son projeté orthogonal sur le plan du rectangle,  $PQ, R, S$  les projetés orthogonaux de  $H$  sur les côtés du rectangle, posons  $a = AH, b = BH, c = CH, x = DH$ .



On retrouve ici la formule d'Ozanam de l'épreuve 2 de Clermont. Avec une autre présentation des (mêmes !) calculs :

D'après le théorème de Pythagore, nous avons

$$\begin{aligned} \text{d'une part :} \quad & a^2 - b^2 = (HP^2 + AP^2) - (HR^2 + BR^2) = HP^2 - HR^2 \\ \text{et d'autre part :} \quad & x^2 - c^2 = (HP^2 + DP^2) - (HR^2 + CR^2) = HP^2 - HR^2 \\ \text{On en déduit :} \quad & x^2 - c^2 = a^2 - b^2. \end{aligned}$$

Comme, toujours par Pythagore :

$$MD^2 - MC^2 = (x^2 + MH^2) - (c^2 + MH^2) = x^2 - c^2$$

$$MA^2 - MB^2 = (a^2 + MH^2) - (b^2 + MH^2) = a^2 - b^2$$

il en résulte que :  $MD^2 = MA^2 + MC^2 - MB^2$ .

**Application numérique** : avec  $MA = 7, MB = 1, MC = 4$ , cela donne :  $MD = 8$  mètres.

(Cf. Clermont 2 pour une situation plus étudiée et Créteil 3 pour une situation analogue (avec d'autres méthodes)).

## Exercice n° 2

### Enoncé

#### Les licornes

Dans l'île Mystérieuse, vivent depuis toujours  $b$  licornes bleues,  $r$  licornes rouges et  $v$  licornes vertes. Un mal étrange vient frapper l'île : dès que deux licornes de couleurs différentes se rencontrent, elles changent toutes les deux de couleur et prennent la couleur restante. Le but de ce problème est d'étudier la possibilité que, sur cette île, les licornes deviennent unicolores.

- 1) Montrer qu'une telle issue est possible dans chacun des cas suivants :
  - a)  $b = r$  ou  $b = v$  ou  $r = v$ .
  - b)  $r = b + 3$  et  $v > 0$ .
  - c)  $r = b + 3k$  où  $k$  est un entier naturel inférieur à  $v$ .
- 2) Dans cette question, on suppose que :  $b = 1, r = 2, v = 3$ . Une telle population peut-elle devenir unicolore ?
- 3) On suppose que  $n$  rencontres ont eu lieu depuis le début du mal, à quelle condition nécessaire et suffisante sur  $b, v, r$ , la population de licornes peut-elle devenir unicolore ?

N.D.L.R. Cf. problème 1, de même nature, de Versailles.

## Solution 1

1°)

- a) Supposons  $b = r$  par exemple, alors  $b$  rencontres «  $br$  » conduiront à l'ensemble  $\{0, 0, v + b + r\}$ . On raisonne de même pour les autres cas.
- b) On suppose  $v > 0$  et  $r = b + 3$ . Après une rencontre «  $rv$  » la population sera  $\{b + 2, b + 2, v - 1\}$ , il suffit alors d'appliquer le résultat a).
- c) On suppose  $v > k > 0$  et  $r = b + 3k$ . Au bout de  $k$  rencontres «  $rv$  », la population sera  $\{b + 2k, b + 2k, v - k\}$  d'où le résultat en appliquant encore a).

2°) Si  $P = \{1, 2, 3\}$  l'arbre suivant montre toutes les évolutions possibles de la population et cette évolution est cyclique :

$$\{1, 2, 3\} \rightarrow \begin{cases} \{0, 1, 5\} \rightarrow \{2, 0, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3\} \\ \{0, 4, 2\} \rightarrow \{2, 3, 1\} \\ \{3, 1, 2\} \end{cases}$$

La population ne peut donc pas devenir unicolore.

3°) Supposons que  $n$  rencontres aient eu lieu et posons  $n = n_{br} + n_{bv} + n_{rv}$  où  $n_{br}, n_{bv}, n_{rv}$  sont des entiers positifs ou nuls et désignent respectivement les nombres de rencontres entre des licornes bleues et rouges, bleues et vertes, rouges et vertes.

Compte tenu de la règle des couleurs, le nombre de licornes bleues sera modifié de  $2n_{rv} - n_{br} - n_{bv}$ , le nombre de licornes rouges sera modifié de  $2n_{bv} - n_{br} - n_{rv}$ , le nombre de licornes vertes sera modifié de  $2n_{br} - n_{rv} - n_{bv}$ , comme  $n = n_{br} + n_{bv} + n_{rv}$ , la population de licornes, à l'issue de ces  $n$  rencontres sera  $P' = \{b - n + 3n_{rv}, r - n + 3n_{bv}, v - n + 3n_{br}\}$ .

La population sera donc unicolore au bout des  $n$  rencontres si et seulement si  $b - r$  ou  $b - v$  ou  $r - v$  est multiple de 3.

## Solution 2(Pierre Jullien)

Sur le même thème, Pierre Jullien propose l'exercice suivant :

### Enoncé : Les caméléons

Sur une île charmante les caméléons peuvent prendre trois couleurs : jaune, marron, vert. Lorsque deux d'entre eux, de couleurs différentes, se rencontrent, il prennent immédiatement la troisième couleur disponible.

Se peut-il qu'à un moment donné, ils aient tous la même couleur ?

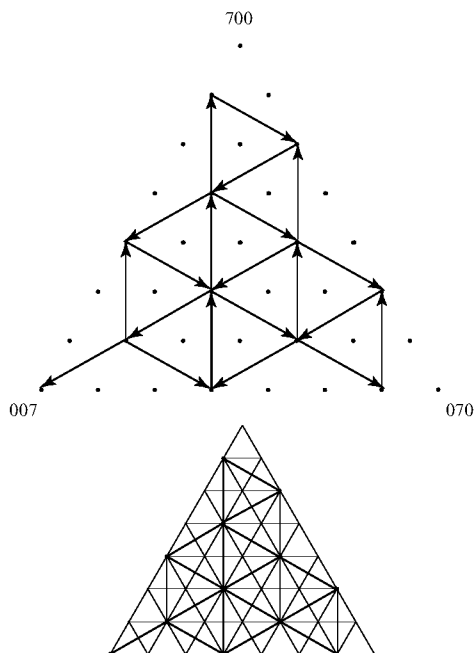
### Réponse

Si le total n'est pas un multiple de 3, OUI d'une seule couleur prédéterminée en fonction de la situation, sinon cela dépend de la situation et la couleur éventuellement obtenue peut être choisie.

Il est nécessaire et suffisant que deux effectifs soient égaux modulo 3 pour que ce soit possible.

### Preuve

Il suffit de comprendre le graphe des situations où l'invariant est le triplet modulo 3 des écarts entre les effectifs de chaque couleur.



N.D.L.R. Un collègue de Limoges nous signale l'existence d'un tel problème, avec des crocodiles, dans un Tournoi du Limousin...source de celui des licornes ?

Avec, peut-être, la source commune signalée par P. Jullien ?

## Palmarès

- Premier prix :** LABOPIN Tatiana - Lycée Alain Colas - NEVERS  
**Deuxième prix :** CHUPEAU Marie - Lycée St Joseph - AUXERRE  
**Troisième prix :** MIGNOT Teddy - Lycée Gabriel Voisin - TOURNUS  
**Quatrième prix :** CHRETIEN Thibaud - Lycée Léon Blum - LE CREUSOT.