

CRÉTEIL

Le candidat choisit deux exercices parmi les trois suivants.

Exercice n° 1

Énoncé

Le voyage

Partant en voyage en voiture, Isa et Josette croisent des bornes kilométriques indiquant la distance les séparant de Paris qu'elles lisent toutes les heures :

- à dix heures, elles lisent une borne portant deux chiffres ;
- à onze heures elles croisent une borne portant les deux mêmes chiffres mais inversés
- et à midi elles lisent une borne portant les mêmes chiffres séparés par un zéro.

En supposant que la voiture roule à vitesse constante, quelle est cette vitesse ?

Par la suite, la circulation s'étant dégagée, elles poursuivent leur voyage en se relayant au volant et en s'accordant une pause toutes les trois heures.

Toutes les 3 heures, elles croisent successivement des panneaux à trois chiffres : abc , bca et cab . En supposant que sur chaque période de trois heures, la vitesse moyenne est la même, quelle est le kilométrage indiqué sur le dernier panneau rencontré ?

Solution

Approche calculatrice proposée par A. Guillemot

1°) ab, ba et $a0b$ étant les numéros des trois bornes rencontrées, on peut en déduire que $a < b$ et que $a = 1$ car la vitesse moyenne est inférieure à 100.

Il en résulte l'équation suivante : $(10b + 1) - (10 + b) = (100 + b) - (10b + 1)$
Ce qui donne $18b = 108$ d'où $b = 6$

Les bornes rencontrées ont pour numéros : 16, 61 et 106
La vitesse était de 45 km/h .

2°) La circulation s'étant dégagée, en trois heures elles font plus de 100 kilomètres donc a, b et c sont des chiffres différents et l'on a : $0 < a < b < c$.

Soit $M = 100a + 10b + c$, $N = 100b + 10c + a$ et $P = 100c + 10a + b$

On a la relation $N - M = P - N$

En essayant toutes les possibilités à l'aide du programme suivant :

(On fait varier a de 1 à 9, b de $a + 1$ à 9 et c de $b + 1$ à 9.)

```
PROGRAM:CRETEIL
:For(A,1,9)
:For(B,A+1,9)
:For(C,B+1,9)
:100A+10B+C→M
:100B+10C+A→N
:100C+10A+B→P
:If P-N=N-M
```

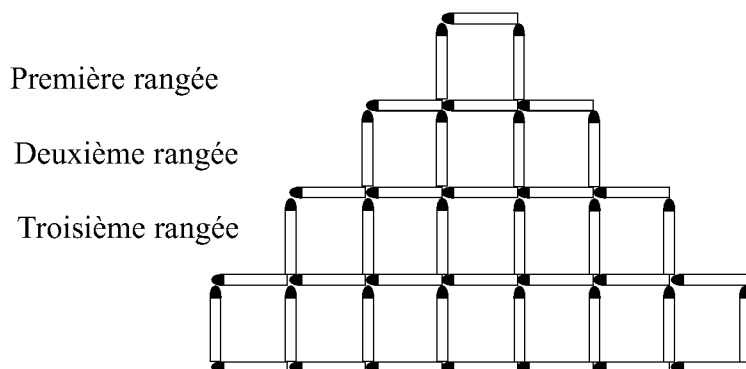
```
PROGRAM:CRETEIL
:Disp(A,B,C)
:End
:End
:End
:
:
:
:■
```

Exercice n° 2

Enoncé

Les allumettes

Des allumettes En disposant des allumettes de longueur identique sur une surface plane, on réalise petit à petit la figure suivante constituée de carrés :



Quelle rangée est-on en train de construire lorsque l'on pose la 100^{ème} allumette ? Lorsque l'on pose la 2006^{ème} allumette ?

Solution (A. Guillemot)

Approche calculatrice.

Toutes les rangées sont formées d'un nombre impair de carrés, ainsi la rangée n contient $2n - 1$ carrés.

On appelle S_n le nombre d'allumettes nécessaire pour réaliser n rangées.

Pour réaliser la rangée suivante qui contiendra $2n + 1$ carrés, il faut :

8 allumettes pour faire les carrés des extrémités.

$2n - 1$ allumettes pour réaliser les côtés "horizontaux".

$2n - 2$ allumettes pour réaliser les côtés "verticaux".

On peut donc dire que $S_{n+1} = S_n + 8 + 2n - 1 + 2n - 2$.

D'où $S_{n+1} = S_n + 4n + 5$ ou bien $S_n = S_{n-1} + 4(n - 1) + 5$

Il suffit de construire la table de valeurs de la suite (S_n) pour répondre au problème.

Utilisation du mode "seq" de sa calculatrice.

On entre la suite (S_n) sous la forme $S_n = S_{n-1} + 4(n - 1) + 5$ dans l'écran $Y =$

```

Plot1 Plot2 Plot3
nMin=1
u(n)=u(n-1)+4(n-1)+5
u(nMin)=(4)
v(n)=
v(nMin)=
w(n)=

```

On demande la table de valeurs par la commande TABLE et on la fait défiler pour obtenir la réponse à nos questions.

n	$u(n)$	
1	4	
2	13	
3	26	
4	43	
5	64	
6	89	
7	118	
$n=1$		

n	$u(n)$	
26	1429	
27	1538	
28	1651	
29	1768	
30	1889	
31	2014	
32	2143	
$n=32$		

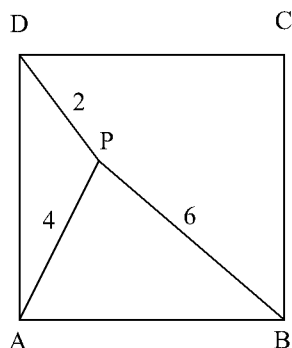
Conclusion.

La 100^{ème} allumette sera utilisée dans la construction de la 7^{ème} rangée et la 2006^{ème} allumette dans la construction de la 31^{ème} rangée.

Exercice n° 3

Enoncé

Le parchemin



Sur ce parchemin ne figurent qu'un carré, trois segments et trois indications de longueur. Déterminer l'angle $\widehat{APD}$.

On pourra construire l'image de cette figure par la rotation de centre A d'angle 90° qui transforme le point B en point D .

Solution 1 (Dominique Roux)

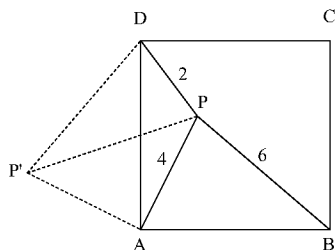
Inspecteur Général Honoraire de mathématiques

Elle suit le conseil de l'énoncé, à cela près qu'il n'est pas utile de considérer toute la figure.

Soit la rotation $\mathcal{R}(A, B \rightarrow D)$, et P' l'image de P .

D'une part, $AP' = AP$, et $\widehat{PAP'} = 90^\circ$. D'où $PP' = 2\sqrt{2}$ (et $\widehat{APP'} = 45^\circ$).

D'autre part, $P'D = PB$.
 $\quad \quad \quad = 6$.



La construction du triangle $P'PD$ le fait conjecturer rectangle en P . Etudions cela :

$P'D^2 = 36$ et $PD^2 + PP'^2 = 4 + 32 = 36$.

Donc $P'D^2 = PD^2 + PP'^2$ et le triangle $P'PD$ est rectangle en P .

Dès lors

$$\begin{aligned}\widehat{APD} &= \widehat{APD'} + \widehat{P'PD} \\ &= 45^\circ + 90^\circ \\ &= 135^\circ.\end{aligned}$$

Remarques, par Henri BAREIL

Le conseil de l'énoncé provient sans doute de la volonté d'associer à PA , PB , PD un triangle dont les côtés s'expriment simplement en fonction de ces trois longueurs, donc constructible.

La rotation $\mathcal{R}$ en conserve deux et établit facilement une mesure de côté liée à la troisième longueur).

Qu'advient-il si les mesures de PA , PB , PD ne sont plus 2 ; 4 ; 6 (ou des nombres proportionnels tels 1 ; 2 ; 3, plus simples!) ou si le triangle ABD cesse d'être rectangle ou isocèle ?

Le Bulletin vert de l'APMEP proposera un article là-dessus.

Notons tout de suite que :

- ① Le cas $AB = AD$ relève de la même rotation que ci-dessus, quel que soit l'angle $\widehat{BAD}$ (angle de la rotation).
- ② Le cas $AB \neq AD$ fait remplacer la rotation par une similitude.
- ③ Avec ces méthodes, la clé de la « détermination » de $\widehat{APD}$ réside dans la construction du triangle $PP'D$.
ce qui pose deux problèmes :

3.1 le choix de PA , PB , PD peut-il être arbitraire ? Non ! Il faut pouvoir construire le triangle $P'PD$!

3.2 La *construction* de ce triangle « détermine » $\widehat{P'PD}$, donc $\widehat{APD}$.

Elle permettrait à un candidat de Créteil de conjecturer un angle droit pour $\widehat{P'PD}$,... et de le démontrer pour obtenir une « valeur exacte » (en degrés ou radians) des deux angles $\widehat{P'PD}$ et $\widehat{APD}$. Mais ce cas est très particulier : il exige, par exemple avec $\widehat{BAD}$ et le rapport $\frac{AB}{AD}$ d'abord connus, un choix en conséquence de PA , PB , PD .

Donner une « valeur exacte » ne serait généralement pas possible. Dans la plupart des cas, chercher à « déterminer $\widehat{P'PD}$ et $\widehat{APD}$ en degrés ou radians » ne se fera qu'avec des valeurs approchées obtenues, si l'on veut les calculer, par l'usage des formules liant angles et côtés d'un triangle (avec une calculatrice de préférence, pour une « bonne » approximation ;...).

- ④ Ce problème n'est pas sans rappeler celui de la « **forêt triangulaire** », problème venu de la revue suisse francophone « MATH-ECOLE », apparu dans le Bulletin n° 456 avec, notamment, **une solution « II.7 » adaptable ici quel que soit le triangle ABD** et dont l'idée-clé structure aussi la solution 4 (Cf. son théorème implicite sur le lieu des points M tels que $\frac{ME}{MF} = k$, E et F fixes et k constant.

Solution 2 (Henri Bareil)

(Solution développée dans le Bulletin de l'APMEP n° 469 ou 470).

Il s'agit d'abord de « déterminer » $\widehat{APB}$ en le construisant :

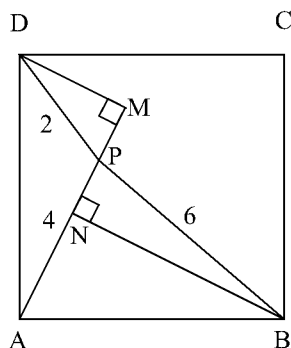
Partons de P arbitraire.

Les points D, A, B sont respectivement sur les cercles $\delta(P; 2)$, $\alpha(P; 4)$, $\beta(P; 6)$.
Soit A arbitraire sur α . B est l'image de D dans une rotation $(A; 90^\circ)$. Il est donc l'un des points communs à β et à l'image du cercle δ dans cette rotation.
Etc.

Solution 3 (François Parisot)⁵

Soit $ABCD$ un carré avec le point P correspondant à l'énoncé.

On appelle M le projeté orthogonal de D sur (AP) et N celui de B sur (AP) .



Dans le triangle rectangle MPD on pose $PM = a$ et $DM = b$, on a la relation : $a^2 + b^2 = 4$.

Les triangles rectangles ADM et BAN sont isométriques. (hypoténuses de même longueur et $\widehat{DAM} = \widehat{ABN}$).

Comme $AN = DM$, on en déduit que $PN = 4 - b$

Comme $AM = BN$, on a $BN = 4 + a$.

Appliquons le théorème de Pythagore au triangle NPB .

$$(4 - b)^2 + (4 + a)^2 = 36$$

En développant cette expression et en tenant compte du fait que $a^2 + b^2 = 4$ on obtient la relation $a = b$.

Donc le triangle MPD est rectangle-isocèle. On a donc $\widehat{DPM} = 45^\circ$.

Il en résulte que l'angle $\widehat{APD}$ mesure 135° .

⁵ Solution proposée par François Parisot du lycée du Léon à Landivisiau (29) lors des journées de l'APMEP de Clermont-Ferrand.

Solution 4 (A. Guillemot)

Approche Cabri .

On va d'abord faire une construction précise de la figure pour pouvoir avoir une idée de la mesure de l'angle $\widehat{APD}$.

Soit $ABCD$ un carré.

$\frac{PA}{PB} = \frac{2}{3}$ ce qui équivaut à $9PA^2 - 4PB^2 = 0$ c'est-à-dire

$$(3\overrightarrow{PA} - 2\overrightarrow{PB})(3\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB}) = 0 \quad (1)$$

Appelons M le barycentre de $\{(A; 3); (B; 2)\}$ et N le barycentre de $\{(A; 3); (B; -2)\}$.

La relation (1) s'écrit alors : $\overrightarrow{PN} \cdot 5\overrightarrow{PM} = 0$, ce qui signifie que P est sur le cercle de diamètre $[MN]$.

$\frac{PD}{PA} = \frac{1}{2}$ ce qui équivaut à $4PD^2 - PA^2 = 0$ c'est-à-dire

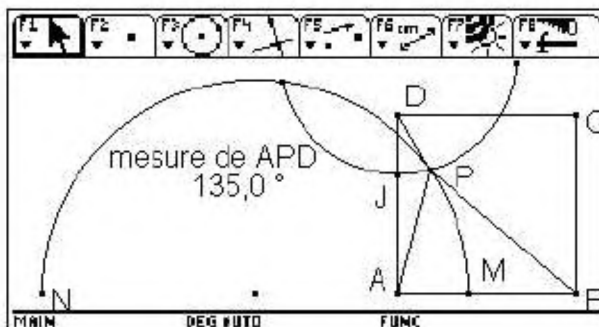
$$(2\overrightarrow{PD} - \overrightarrow{PA})(2\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PA}) = 0 \quad (2)$$

Appelons J le barycentre de $\{(A; 1); (D; 2)\}$ et K le barycentre de $\{(A; -1); (D; 2)\}$.

La relation (2) s'écrit alors : $\overrightarrow{PK} \cdot 3\overrightarrow{PJ} = 0$, ce qui signifie que P est sur le cercle de diamètre $[IJ]$.

(Remarque : La droite (CM) coupe (AD) en J).

En traçant ces deux cercles et en plaçant le point P on peut évaluer la mesure de l'angle $\widehat{APD}$.



Il semble que cet angle mesure 135° .

Démonstration.

En supposant que $PD = 2$, $PA = 4$ et que $\widehat{APD} = 135^\circ$, on va montrer que $PB = 6$.

1) Calcul de la longueur du côté du carré.

Dans le triangle APD on a :

$$AD^2 = AP^2 + DP^2 - 2AP \cdot DP \cos(\widehat{APD})$$

Ce qui donne :

$$AD^2 = 16 + 4 + 2 \times 4 \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 20 + 8\sqrt{2}.$$

$$\text{d'où } AD = 2\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}.$$

2) Calcul de $\cos(\widehat{DAP})$.

Dans le triangle DAP on a :

$$DP^2 = AD^2 + AP^2 - 2AD \cdot AP \cdot \cos(\widehat{DAP})$$

Ce qui donne :

$$4 = 16 + 20 + 8\sqrt{2} - 16\sqrt{5 + 2\sqrt{2}} \cos(\widehat{DAP})$$

$$\text{d'où } \cos(\widehat{DAP}) = \frac{32 + 8\sqrt{2}}{16\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}} = \frac{4 + \sqrt{2}}{2\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}}$$

3) Calcul de $\cos(\widehat{PAB})$

$$\cos^2(\widehat{DAP}) = \frac{18 + 8\sqrt{2}}{4(5 + 2\sqrt{2})} = \frac{9 + 4\sqrt{2}}{10 + 4\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{10 + 4\sqrt{2}}$$

$$\text{D'où } \sin^2(\widehat{DAP}) = \cos^2(\widehat{PAB}) = \frac{1}{10 + 4\sqrt{2}} = \frac{5 - 2\sqrt{2}}{34}$$

$$\cos(\widehat{PAB}) = \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{2}}{34}}$$

4) Calcul de PB .

Dans le triangle APB , on a :

$$PB^2 = AP^2 + AB^2 - 2 \cdot AP \cdot AB \cdot \cos(\widehat{PAB})$$

Ce qui donne :

$$PB^2 = 36 + 20 + 8\sqrt{2} - 2 \times 4 \times 2\sqrt{5 + 2\sqrt{2}} \times \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{2}}{34}} = 36 + 8\sqrt{2} - 16\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{34}} = 36 + 8\sqrt{2} - 8\sqrt{2} = 36$$

D'où $PB = 6$, ce qui permet de dire que la conjecture est bonne et donc que l'angle recherché mesure bien 135° .