

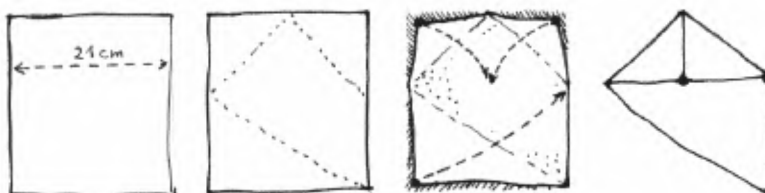
CORSE

Exercice n° 1

Enoncé

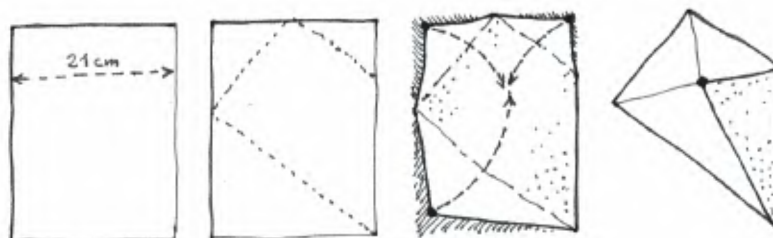
Pliages

1. On dispose d'une feuille de papier rectangulaire de largeur 21 centimètres, que l'on peut plier afin d'obtenir la forme d'un quadrilatère comme indiqué sur le dessin suivant :



Déterminer la longueur de cette feuille de papier.

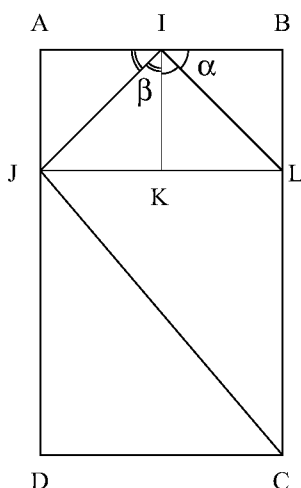
2. On dispose d'une autre feuille de papier rectangulaire de largeur 21 centimètres, que l'on peut plier d'une autre façon, afin d'obtenir la forme d'un quadrilatère comme indiqué sur le dessin suivant :



Déterminer la longueur de cette feuille de papier.

Solution

1. $ABCD$ est un rectangle ; par « pliage » autour d'un de ses côtés, un triangle est transformé en un triangle isométrique, qui a les mêmes angles et des côtés de même longueur.



Cela impose donc $IA = IK = IB$, $BL = LK$ et $JA = JK$, et donc J , K et L sont alignés.

De même, $JD = JL$, $\widehat{JDC} = \widehat{JLC}$ et $\widehat{JLC} = \widehat{JDC} = 90^\circ$

Posons $\widehat{BIL} = \widehat{KIL} = \alpha$, $\widehat{AIJ} = \widehat{KIJ} = \beta$.

Alors $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$ d'où $\widehat{JIL} = \alpha + \beta = 90^\circ$.

On a alors $\widehat{BLI} = \widehat{KLI} = \beta$ et $\widehat{AJI} = \widehat{KJI} = \alpha$

De plus $\widehat{BLK} = 180^\circ - \widehat{JLC} = 90^\circ$ donc $\beta = 45^\circ$ et donc $\alpha = 45^\circ$.

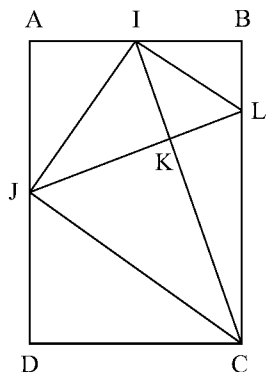
Les quatre triangles AIJ , IJK , BIL , LIK sont rectangles isocèles. $AJ = AI = \frac{21}{2} = 10,5$.

La longueur de la feuille est $AD = AJ + JD = 31,5$ cm.

2. Par symétrie les triangles AIJ et KIJ sont isométriques et rectangles, les triangles BIL et KIL sont isométriques et rectangles, les triangles JDC et JKC sont isométriques et rectangles. On en déduit que les points J , K et L sont alignés, ainsi que I , K et C . On démontre comme précédemment que le triangle IJJ est rectangle en I , et que IJC est rectangle en J .

(JK) est la hauteur du triangle rectangle IJC perpendiculaire à l'hypoténuse ; le triangle JCI est alors semblable aux triangles KJI et KCJ .

Posons $AI = IK = IB = a$, $AJ = JD = JK = b$. On a donc $2a = 21$ donc $a = 10,5$.



Les triangles KJI et KCJ étant semblables : $\frac{KJ}{KC} = \frac{KI}{KJ}$ donc $KJ^2 = KI.KC$ soit $b^2 = 2a^2 \Leftrightarrow b = a\sqrt{2}$.

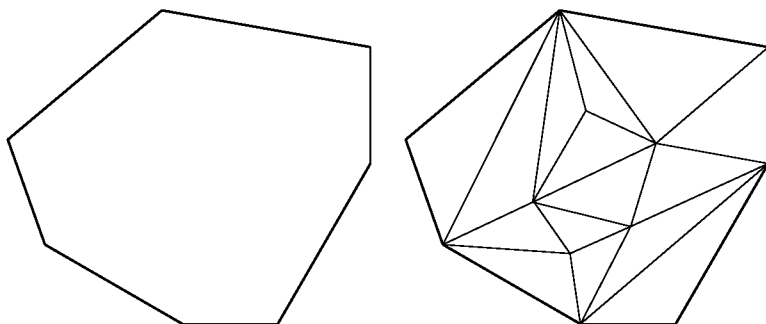
Donc on obtient $AD = 2a\sqrt{2} = 21\sqrt{2} \approx 29,7\text{cm}$.

C'est notre feuille de papier A4...

Exercice n° 2

Enoncé

Triangulation



On dit que l'on a « triangulé » un polygone convexe lorsqu'on a tracé un ensemble de triangles qui ne se chevauchent pas, remplissant l'intérieur du

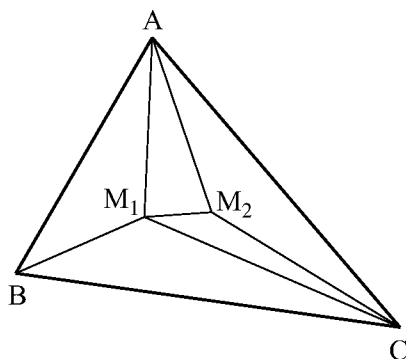
polygone et dont les sommets sont soit ceux du polygone soit des points à l'intérieur de celui-ci, et dont les côtés ne contiennent de sommets qu'en leurs extrémités.

- 1) Soit ABC un triangle.
 - a) Soit M_1 un point intérieur à ABC . déterminer les triangulations de ABC de sommets $ABCM_1$.
 - b) Soient M_1M_2 deux points distincts, intérieurs au triangle ABC . Démontrer que toutes les triangulations de ABC de sommets $ABCM_1M_2$, ont le même nombre de triangles.
- 2) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On considère un polygone convexe de n côtés. Déterminer en fonction de n , le nombre de triangles d'une triangulation de votre choix ayant pour seuls sommets ceux du polygone.
- 3) On considère un polygone convexe de 2006 côtés que l'on a triangulé avec 4 012 triangles. Déterminer le nombre de côtés qu'il a fallu tracer à l'intérieur du polygone.

Solution

1.a) Les sommets étant A, B, C, M_1 , chaque côté du triangle ABC est côté d'un triangle de la triangulation. Le troisième sommet de ces trois triangles ne peut être que M_1 .

1.b) Soient M_1, M_2 deux points distincts, intérieurs au triangle ABC (figure ci-dessous). Chaque côté du triangle ABC est côté d'un triangle de la triangulation dont le troisième sommet est M_1 ou M_2 . De ces trois triangles deux ont donc le même sommet, par exemple ABM_1 et BCM_1 et donc un côté commun. Le second sommet M_2 , qui ne peut pas être sur un côté, est extérieur à ces deux triangles. Il reste à trianguler ACM_1 , à l'aide du sommet M_2 , nécessairement en trois triangles. Toutes les triangulations ont cinq triangles.



2) On considère un polygone convexe de n côtés. La triangulation n'a pas de sommets intérieurs au polygone, donc les côtés des triangles ont pour extrémités les sommets du polygone et ne se croisent pas. On obtient par exemple une

triangulation en joignant un sommet aux autres qui le lui sont pas adjacents. les troisièmes côtés de ces triangles forment une ligne brisée entre $n - 1$ points : il y a $n - 2$ segments donc $n - 2$ triangles.

3) Soit c le nombre de côtés tracés à l'intérieur du polygone. 4 012 triangles cela représente $3 \times 4\,012 = 12\,036$ côtés, ou les côtés du polygone ont été comptés une fois et les côtés intérieurs, étant communs à deux triangles comptés deux fois . Ainsi : $12\,036 = 2\,006 + 2c$. Donc $c = \frac{12\,036 - 2\,006}{2} = 5\,015$.

Commentaire

De beaux exercices, de compréhension et de recherche n'exigeant pas - surtout le 2! - de grandes connaissances...