

CLERMONT-FERRAND

Exercice n° 1

Énoncé

Au paradis des mathématiciens

Au paradis des mathématiciens, Fermat et Gauss jouent au jeu suivant arbitré par Diophante : Fermat et Gauss choisissent chacun un entier naturel qu'ils communiquent à Diophante ; Diophante effectue soit le produit, soit la somme de ces deux nombres et donne le résultat : 2006. Fermat dit : « je ne peux pas trouver le nombre choisi par Gauss » ; Gauss dit alors : « je ne peux pas trouver le nombre choisi par Fermat » ; Pouvez-vous en déduire le nombre choisi par Gauss ?

Diophante d'Alexandrie a vécu au III^{ème} siècle, Pierre Fermat de 1601 à 1665, Carl Friedrich Gauss de 1777 à 1855. Ils ont tous les trois fait des apports majeurs à l'Arithmétique

Solution

Soit F et G les nombres choisis par Fermat et Gauss ; si Diophante a choisi le produit, F divise 2 006 ; si donc F ne divise pas 2 006, Fermat peut en déduire que Diophante a choisi la somme et donc que $G = 2006 - F$; s'il ne peut pas c'est que F divise 2 006. Par le même raisonnement, G divise 2 006 ; deux cas sont alors possibles : $F = 2006 - G$ ou $F = \frac{2006}{G}$.

Si on avait $G = 2006$, on ne pourrait pas avoir $F = 0$ qui ne divise pas 2 006 et Gauss en déduirait que $F = 1$; on a donc $1 < G < 1\,003$; si $G < 1\,003$, $2006 - G$ ne pourrait pas diviser 2 006 et Gauss en déduirait que $F = \frac{2006}{G}$; on a donc $G = 1\,003$ et soit $F = 2$ soit $F = 1003$.

Source : *Tournoi des villes*, automne 2002 Epreuve normale première-Terminale.

Exercice n° 2

Enoncé

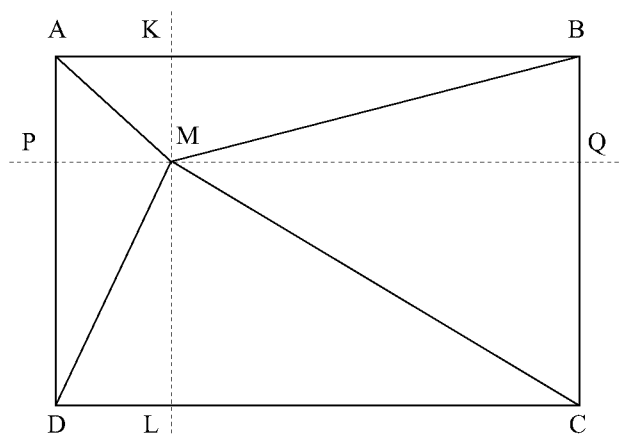
Jeu de baby-foot

Florian joue au baby-foot avec ses amis : le plateau du jeu est assimilé à un rectangle $ABCD$ et la boule à un point M du rectangle.

- 1) La boule se trouve à 30cm de A , 80 cm de B et 90 cm de C .
 - a) Construire à l'échelle 1/10 un plateau de jeu et un point M répondant à ces données.
 - b) A quelle distance la boule se trouve t-elle du sommet D ?
 - c) Quelles sont alors les valeurs possibles de la distance AB ?
- 2) Florian joue et décrète : « La boule se trouve maintenant à 80 cm de A , 90 cm de B et 30 cm de C ». Qu'en pensez-vous ?
- 3) On pose $MC = d$. A quelle condition sur d existe-t-il un rectangle $ABCD$ et une position de M à l'intérieur du rectangle telle que $AM = 30$, $BM = 80$ et $MC = d$?

Solution

1) a)



b) On appelle P et Q les projetés orthogonaux de M sur (AD) et (BC) , puis K et L les projetés orthogonaux de M sur (AB) et (CD) .

Le théorème de Pythagore donne :

$$\begin{aligned} MA^2 + MC^2 &= MK^2 + KA^2 + MQ^2 + QC^2 \\ &= MK^2 + KB^2 + MP^2 + PD^2 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2}$ (1)⁴

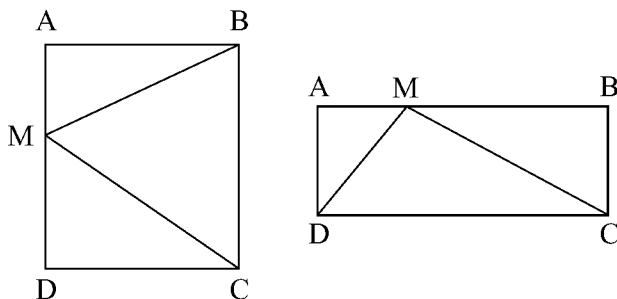
Cette relation a été établie par Jacques Ozanam (1640-1717).

Ici $MD = \sqrt{30^2 + 90^2 - 80^2} = \sqrt{2\,600} = 10\sqrt{26} \approx 51$ cm à 1 cm près.

c) Le triangle AMB doit vérifier les 3 conditions : $AM = 30$; $BM = 80$ et l'angle $\widehat{MAB}$ est aigu ou droit.

Donc $\sqrt{80^2 - 30^2} \leq AB \leq 30 + 80$ soit $\boxed{AB \in [\sqrt{5\,500}; 110]}$.

Voici les 2 cas de figures extrêmes.



2) Dans ce cas, $MA^2 + MC^2 = 80^2 + 30^2 = 7\,300 < 90^2 = MB^2$. La relation (1) ne peut pas être vérifiée. Florian a dû se tromper dans ses mesures !

3) *condition nécessaire* : si la figure est possible alors

$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$$

$$\text{soit } 30^2 + d^2 = 80^2 + MD^2,$$

$$\text{soit } d^2 = 5\,500 + MD^2,$$

$$\text{donc } d \geq \sqrt{5\,500}$$

condition suffisante : si $d \geq \sqrt{5\,500}$ alors on peut toujours construire un rectangle ABCD avec $AC = CD = \sqrt{5\,500}$ et $M \in [AD]$ vérifiant les conditions requises : voir la figure de la question 1) c).

$\boxed{d \geq \sqrt{5\,500}}$ est la condition cherchée.

Commentaires de la rédaction

Question 1 On n'imagine pas un babyfoot de dimensions quelconques (il semble que la norme du plateau de jeu soit 1,50 m $\times$ 1 m, avec des plateaux « semblables » pour des babyfoot juniors ou enfants).

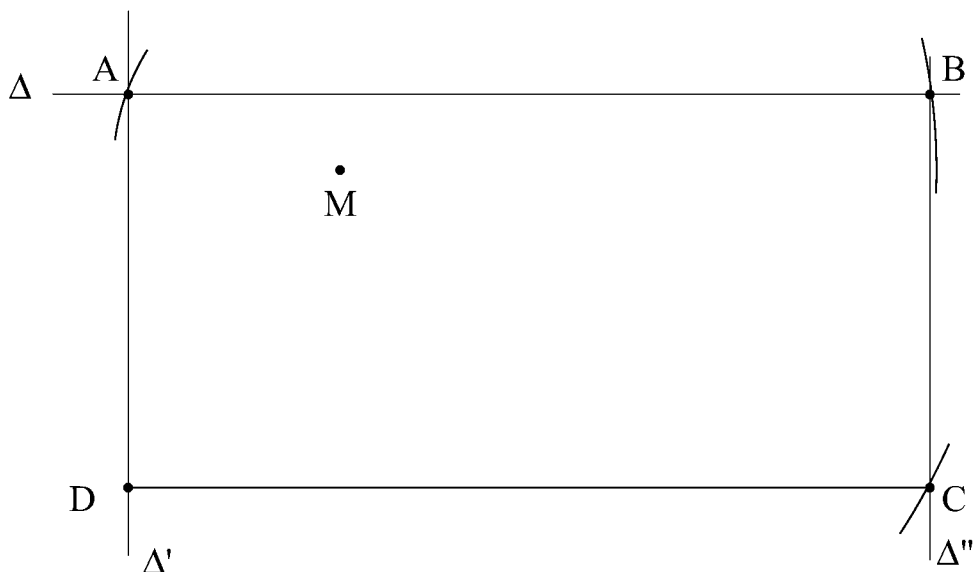
Mais ici, oui, puisqu'il n'y a, pour le plateau du jeu que la **donnée** de sa forme rectangulaire. La construction laisse donc beaucoup d'arbitraire !

⁴N.D.L.R. : La relation subsiste où que soit M dans le plan de $ABCD$.

On peut, par exemple, choisir arbitrairement une droite Δ , un point M extérieur, puis placer, au compas A et B sur Δ tels que $MA = 3$ cm, $MB = 8$ cm (ce qui exige que M soit à moins de 3 cm de Δ), A et B étant choisis tels que M soit à l'intérieur de la bande formée par les droites Δ' et Δ'' respectivement perpendiculaires en A et B à Δ .

Il reste ensuite à placer C sur Δ'' , toujours avec la même précaution « d'intériorité » pour M . D'où D .

On obtient donc des plateaux de jeux variables selon la distance de M à (AB) . Voici un dessin au 1/10 (où M est à 1 cm de Δ).



Refaisons le dessin avec M à 2 cm de Δ et, pourquoi pas, à 3 cm de Δ ,...

Si (et seulement si) les dessins sont soignés, tous semblent donner la même longueur MD , environ 5 à 5,2 cm. . .

Vraiment, on aurait la même longueur ?

Autrement dit, MD ne dépendrait que de MA , MB , MC ? Il y aurait une relation entre eux ?

Ceci nous branche sur l'utilisation des triangles rectangles dessins dans la figure 1 et sur la question 1.b) avec sa belle formule d'Ozanam.

Pour la question 1.c), il faut voir qu'il n'y a pas en jeu que l'existence du triangle MAB mais qu'il y a encore l'exigence de l'intériorité de M dans la bande Δ', Δ'' , ce qui est bien traduit pas le corrigé.

UNE SITUATION APPAREMMENT ANALOGUE EST PROPOSÉE PAR L'EXERCICE 3 DE CRÉTEIL ET SES PROLONGEMENTS (Cf. page 83)

Mais, dans l'exercice de Créteil lui-même, il est imposé une autre contrainte que ci-dessus.

En se reportant à sa solution et aux prolongements esquissés (développés dans un Bulletin Vert 469 ou 470) on verra surgir d'autres méthodes.