

CAEN

Exercice n° 1

Enoncé

Pliages

(Séries S)

On rappelle que deux rectangles sont semblables s'ils ont le même rapport longueur/largeur.

(On convient comme d'habitude que la mesure de la longueur est toujours supérieure ou égale à celle de la largeur).

On dispose d'une feuille rectangulaire de dimensions L et ℓ , avec $L > \ell$. Un des axes de symétrie est horizontal, l'autre est vertical.

On plie cette feuille suivant son axe vertical (opération p_1), puis suivant l'axe horizontal du rectangle obtenu (opération p_2), puis suivant l'axe vertical du nouveau rectangle (opération p_3), et ainsi de suite en alternant pliage suivant la verticale et pliage suivant l'horizontale et en notant p_n la $n^{\text{ième}}$ opération.

Si l'on déplie la feuille après avoir effectué un certain nombre de pliages, on constate que l'on a obtenu un pavage par des rectangles.

- 1°) Combien le pavage comporte-t-il de rectangles après avoir effectué les opérations p_4 ? p_7 ? p_n ?
- 2°) Montrer que, si n est pair, tous les rectangles du pavage sont semblables au rectangle de départ.
- 3°) Est-il possible d'obtenir un pavage par des carrés ?
- 4°) Est-il possible qu'après **chaque opération** p_n on obtienne un pavage par des rectangles tous semblables au rectangle de départ ?

Solution

1°) Soit R_0 le rectangle initial, le pliage p_1 donne deux rectangles R_1 , superposés donc isométriques, qui forment, après dépliage, un pavage de R_0 ; puis p_2

donne quatre rectangles R_2 superposés qui forment, après dépliage, un pavage de chacun des R_1 en deux rectangles et un pavage de R_0 en quatre rectangles égaux à R_2 . En poursuivant le même raisonnement, on conclut que p_3 donne un pavage de R_0 en 8 rectangles et que p_4 donne un pavage de R_0 en 16 rectangles. De la même façon p_5 donne 32 rectangles, p_6 donne 64 rectangles et p_7 donne 128 rectangles.

De proche en proche, si après p_n on obtient un pavage de R_0 en 2^n rectangles égaux R_n , alors le $(n+1)^{\text{ème}}$ pliage donne pour chaque R_n deux rectangles R_{n+1} , donc $2 \times 2^n = 2^{n+1}$ rectangles R_{n+1} qui forment un pavage de R_0 .

2°) On dira qu'un rectangle est du type $(x; y)$ si son côté horizontal est de longueur x et son côté vertical de longueur y ; ainsi R_0 est soit $(L; \ell)$ soit $(\ell; L)$.

- Si R_0 est $(L; \ell)$ alors R_1 est $\left(\frac{L}{2}; \ell\right)$ et R_2 est $\left(\frac{L}{2}; \frac{\ell}{2}\right)$ donc R_2 est semblable à R_0 .

Chaque pliage divise par deux alternativement la première puis la deuxième dimension, donc après avoir fait un nombre $n = 2k$ de pliages, les deux dimensions ont été divisées par 2^k , autrement dit R_{2k} est $\left(\frac{L}{2^k}; \frac{\ell}{2^k}\right)$ et comme on a $\frac{L}{2^k} > \frac{\ell}{2^k}$, R_0 et R_{2k} ont le même rapport longueur/largeur.

- Si R_0 est $(\ell; L)$, alors le raisonnement est le même.

3°) D'après ce qui précède, R_0 n'étant pas un carré, si l'on veut obtenir un pavage par des carrés il faudra nécessairement effectuer un nombre impair de pliages; de plus on peut remarquer que, pour tout n , R_n et R_{n+2} sont semblables, donc il faut que le premier pliage donne deux carrés.

- Si R_0 est $(\ell; L)$ alors R_1 est $\left(\frac{\ell}{2}; L\right)$ qui n'est jamais un carré car $\frac{\ell}{2} < L$.
- Si R_0 est $(L; \ell)$ alors R_1 est $\left(\frac{L}{2}; \ell\right)$; c'est un carré si et seulement si $\frac{L}{2} = \ell$ soit $L = 2\ell$.

4°) Les remarques précédentes permettent de dire que chaque opération donne un pavage par des rectangles semblables à R_0 si et seulement si R_1 est semblable à R_0 .

- Si R_0 est $(\ell; L)$ alors R_1 est $\left(\frac{\ell}{2}; L\right)$ et pour qu'il y ait similitude, il faut $\frac{L}{\ell} = \frac{L}{\frac{\ell}{2}}$ ce qui est impossible puisque $\ell \neq \frac{\ell}{2}$.
- Si R_0 est $(L; \ell)$ alors R_1 est $\left(\frac{L}{2}; \ell\right)$;

- si $\frac{L}{2} < \ell$, il y a similitude si l'on a $\frac{L}{\ell} = \frac{\ell}{\frac{L}{2}}$ qui peut s'écrire $\frac{L}{\ell} = \frac{2}{\frac{L}{\ell}}$,
soit encore $\left(\frac{L}{\ell}\right)^2 = 2$ ce qui correspond à $\frac{L}{\ell} = \sqrt{2}$
- si $\frac{L}{2} > \ell$, il y a similitude si l'on a $\frac{L}{\ell} = \frac{\frac{L}{2}}{\ell}$, ce qui est impossible
puisque $L \neq \frac{L}{2}$.

Exercice n° 2

Enoncé

Les SMS

(Toutes séries, sauf S)

M. Dubois demande à quatre amis (Anne, Benoît, Cécile et Didier) le nombre de SMS qu'ils ont envoyés le mois dernier.

Il constate alors que chacun a envoyé au moins un message et que Anne en a envoyé 50% de plus que Benoît.

D'autre part, Benoît et Cécile ont envoyé ensemble autant de SMS que Didier. De même, Didier et Cécile en ont envoyé autant que Anne.

- 1° Classer les quatre amis en fonction du nombre de messages envoyés.
- 2° Si Cécile avait envoyé 10 messages, combien les trois autres en auraient-ils envoyé ?
- 3° Benoît et Anne ont-ils pu envoyer ensemble 125 messages ?
- 4° Quel est le nombre minimum de SMS envoyés ensemble par les quatre amis ?
- 5° M. Dubois se souvient du nombre approximatif de SMS envoyés par les quatre amis : entre 500 et 525.
Peut-on retrouver le nombre de messages envoyés par chacun d'eux ?

Solution

1°) On appelle a , b , c et d les nombres de messages envoyés respectivement par Anne, Benoît, Cécile et Didier. a , b , c et d étant des nombres entiers positifs.

Chacun a envoyé au moins 1 message donc $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ et $d > 0$.

Le nombre de messages envoyés par Anne est supérieur de 50% au nombre de ceux envoyés par Benoît, donc $a = 1,5b$ (équation 1).

Benoît et Cécile ont envoyé ensemble autant de messages que Didier, donc $b + c = d$ (équation 2).

Didier et Cécile ont envoyé ensemble autant de messages que Anne, donc $d + c = a$ (équation 3).

En remplaçant, dans l'équation 3, d par son expression de l'équation 2, et a par son expression de l'équation 1, on obtient $b + c + c = 1,5b$, ce qui, après réduction, donne $0,5b = 2c$, ou $b = 4c$.

L'équation 2 donne alors $d = 4c + c = 5c$ et l'équation 1 donne $a = 1,5 \times 4c = 6c$. Or, comme $c > 0$, $6c > 5c > 4c > c$ soit $a > d > b > c$.

2°) On a immédiatement, d'après la question précédente, $a = 60$, $b = 40$, $d = 50$.

3°) On sait que $a + b = 6c + 4c = 10c$.

Pour que $a + b$ soit égal à 125, il faudrait donc que $10c = 125$, soit $c = 12,5$. Or ceci est impossible puisque c doit être entier.

4°) D'après le 1°, $a + b + c + d = 6c + 4c + 5c + c = 16c$.

Or $c \geq 1$, donc $a + b + c + d \geq 16$.

Les quatre amis ont envoyé au moins 16 messages.

5°) On sait que $a + b + c + d = 16c$.

Le nombre total de messages envoyés par les quatre amis doit donc être un multiple de 16.

Or $500 = 16 \times 31 + 4$ et $525 = 16 \times 32 + 13$.

Le seul multiple de 16 compris entre 500 et 525 est donc 16×32 soit 512. La seule valeur possible pour c est 32.

Dans ce cas, $a = 6 \times 32 = 192$,

$b = 4 \times 32 = 128$,

et $d = 5 \times 32 = 160$.

Exercice n° 3

Enoncé

La spirale du chien

Un chien est attaché par une laisse d'une longueur de 10 mètres en un point F d'un poteau cylindrique de diamètre 2 mètres. Le chien circule en gardant en permanence sa laisse tendue et on suppose qu'il se déplace en tournant autour du poteau dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (pour un observateur regardant la scène du dessus).

On suppose aussi que le sol est plan, que l'axe du poteau est perpendiculaire à ce plan.

On assimilera le chien à un point situé dans le plan du sol. On supposera que le point F est aussi dans ce plan et on appellera O le point de l'axe du poteau situé dans ce plan.

On appelle D la position initiale du chien. On suppose que D est sur la demi-droite $[OF)$.

Lorsque le chien circule, sa laisse, qu'on suppose sans épaisseur, s'enroule autour du poteau.

1°) Faire un dessin soigné à l'échelle $\frac{1}{100}$. On fera figurer sur ce dessin les positions du chien :

- C_1 lorsque sa laisse devient pour la 1^{ère} fois perpendiculaire à sa direction initiale
- C_2 lorsque sa laisse devient pour la 1^{ère} fois parallèle à sa direction initiale
- C_3 lorsque sa laisse devient pour la 2^{ème} fois perpendiculaire à sa direction initiale
- C_4 lorsque sa laisse devient pour la 2^{ème} fois parallèle à sa direction initiale.

On indiquera dans chaque cas la longueur libre de la laisse.

La droite (OF) partage le plan en deux demi-plans. On appelle P_1 le demi-plan dans lequel s'engage le chien lorsqu'il quitte sa position de départ et P_2 l'autre demi-plan.

2°) On a tracé sur le sol une ligne de poudre blanche entre deux points M et N tous les deux situés dans le demi-plan P_1 sur la perpendiculaire en F à (OF) et tels que $FM = 4$ m et $FN = 9,5$ m.

Le chien risque-t-il de se blanchir la patte ?

3°) Une flaque d'eau circulaire a pour rayon $r = 0,3$ m et pour centre le point G dans le demi-plan P_2 sur la perpendiculaire en O à (OF) tel que $OG = 7$ m.

Le chien va-t-il se mouiller la patte ?

On rappelle que la longueur d'un arc de cercle est proportionnelle à la mesure de l'angle au centre qui l'intercepte.

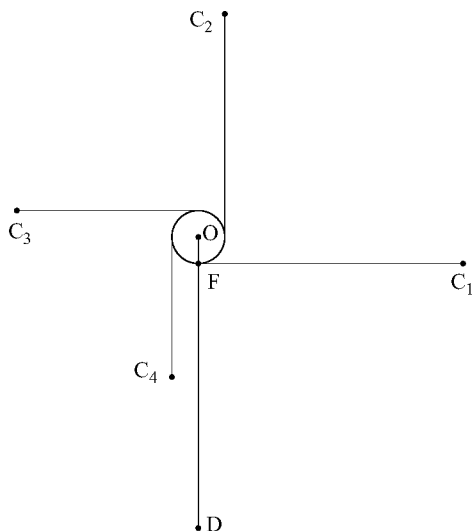
Solution

1°) Quand le chien est en C_1 , la longueur libre de la laisse est sa longueur initiale, soit 10 m.

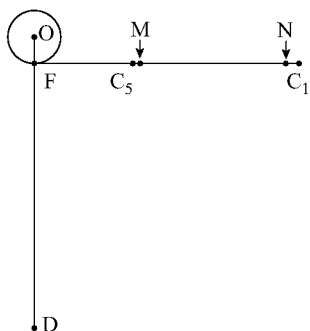
Quand le chien est en C_2 , la longueur libre de la laisse a diminué d'un quart de la circonférence du poteau. Elle est donc $10 - \frac{\pi}{2}$ m, soit 8,43 m à 10^{-2} près.

Quand le chien est en C_3 , la longueur libre de la laisse a encore diminué d'un quart de la circonférence du poteau. Elle est donc $10 - \pi$ m, soit 6,86 m à 10^{-2} près.

Quand le chien est en C_4 , la longueur libre de la laisse a encore diminué d'un quart de la circonférence du poteau. Elle est donc $10 - \frac{3\pi}{2}$ m, soit 5,29 m à 10^{-2} près.



2°)



$FC_1 = 10$ donc $FC_1 > FN$.

Le chien, lorsqu'il coupera pour la première fois la droite (MN) , passera au-delà du point N .

Après un tour complet du poteau, c'est-à-dire lorsque le chien coupera pour la deuxième fois la demi-droite $[FM)$, la longueur libre de la laisse sera $10 - 2\pi$.

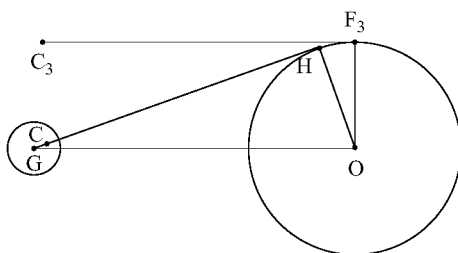
Or $10 - 2\pi \approx 3,72$ à 10^{-2} près par excès.

Donc, si on appelle C_5 la position du chien à ce moment, $FC_5 < FM$.

Le chien passera donc en-deça du point M .

Le chien ne coupera pas le segment $[MN]$ et n'aura donc pas la patte blanche.

3°) La figure ci-dessous n'est pas à l'échelle, mais cela ne nuit pas au raisonnement.



Appelons C la position du chien lorsque sa laisse sera portée par une droite passant par G . Elle sera alors tangente au cercle du poteau central en un point H tel que OGH soit un triangle rectangle en H .

Donc, d'après le théorème de Pythagore,

$$GH = \sqrt{OG^2 - OH^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \approx 6,928.$$

A partir du point F_3 , point de contact de la laisse lorsque le chien est en C_3 , la perpendiculaire à cette laisse passant par O aura tourné d'un angle $\alpha = \widehat{F_3OH}$. Or $\widehat{F_3OH}$ est le complémentaire de $\widehat{HOG}$ qui est lui-même le complémentaire de $\widehat{HGO}$.

Donc $\widehat{HGO} = \alpha$.

Alors $\sin \alpha = \frac{OH}{OG} = \frac{1}{7}$, d'où $\alpha \approx 0,143$ rad à 10^{-3} près par défaut.

La longueur libre de la laisse est donc dans ce cas $HC = F_3C_3 - \alpha = 10 - \pi - \alpha \approx 6,715$ à 10^{-3} près par défaut.

Dans ce cas, $GC \approx 0,213$ à 10^{-3} près par défaut.

Donc GC est inférieur au rayon de la flaque. Le chien posera la patte dans la flaque.

Palmarès

Premier prix : COSTARD Franck - Lycée Jean Guéhenno - FLERS.