

BORDEAUX

Exercice n° 1

Énoncé

Produit de chiffres

Pour n entier naturel, on désigne par $P(n)$ le produit des chiffres intervenant dans l'écriture décimale de n .

Exemples : $P(5) = 5$, $P(47) = 4 \times 7 = 28$.

On se propose de déterminer tous les entiers n vérifiant :

$$P(n) = n^2 + 1002n - 2006.$$

1. Déterminer tous les nombres qui s'écrivent avec un seul chiffre et sont solutions du problème.
2. Démontrer que, si k est le nombre de chiffres de n , alors :

$$P(n) \leq 9^k \text{ et } 10^{k-1} \leq n.$$

3. En déduire l'encadrement suivant :

$$10^{2k-2} + 1002 \times 10^{k-1} - 2006 \leq P(n) \leq 9^k.$$

4. Le problème a-t-il des solutions s'écrivant avec deux chiffres ?
5. Conclure.

Solution 1

1°) Si n a un seul chiffre, on a $P(n) = n$ d'où, si n est solution du problème, $n^2 + 1002n - 2006 = n$, soit $n^2 + 1001n - 2006 = 0$. Seul le chiffre 2 est solution de cette équation ; le seul nombre ayant un seul chiffre solution du problème est 2.

2°) Si k est le nombre de chiffres de n , tous ces chiffres sont inférieurs ou égaux à 9, donc le produit de tous ces chiffres est inférieur ou égal à 9^k . D'autre part, si n a k chiffres il est compris entre 10^{k-1} et 10^k . Donc on a bien $n \geq 10^{k-1}$.

3°) A partir de $n \geq 10^{k-1}$, on obtient
 $n^2 + 1002n - 2006 \geq 10^{2k-2} + 1002 \times 10^{k-1} - 2006$, d'où l'encadrement si n vérifie la propriété.

4°) Si $k = 2$, $10^{2k-2} + 1002 \times 10^{k-1} - 2006$ est égal à 8 114, et 9^k est égal à 81, donc il est impossible de trouver un entier n de deux chiffres vérifiant l'égalité.

5°) si $k > 2$, le nombre $10^{2k-2} + 1002 \times 10^{k-1} - 2006$ est de plus en plus grand et est toujours plus grand que 9^k , donc il n'y a pas de solution possible si $k > 2$. Finalement le seul entier qui vérifie la propriété $P(n) = n^2 + 1002 \times n - 2006$ est 2.

Solution 2 (Abderrahim Ouardini)

Quelques candidats pensaient que la suite $(P(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone, ce qui est faux, puisqu'il existe une infinité d'entiers naturels n tels que $P(n+2) < P(n) < P(n+1)$.

En effet, pour k entier naturel non nul, prenons par exemple $n = \underbrace{88 \dots 88}_{k \text{ chiffres}}$, on

a $P(n+2) = 0$, $P(n) = 8^k$ et $P(n+1) = 9 \cdot 8^k$.

A part la solution officielle, je propose ici une solution basée sur le résultat suivant :

« Pour n entier naturel ayant au moins deux chiffres, on a l'inégalité : $P(n) < n$. »

Première preuve :

Montrons l'inégalité ci-dessous par récurrence sur k le nombre de chiffres de $n = \overline{a_1 a_2 \dots a_k}$.

Si n a deux chiffres, $n = \overline{a_1 a_2}$, on a $a_2(a_1 - 1) \leq 9(a_1 - 1) < 10a_1$, donc $a_1 a_2 < 10a_1 + a_2 = n$.

Supposons que l'inégalité est vraie à l'ordre k , soit $n' = \overline{a_1 a_2 \dots a_{k+1}}$ un entier naturel de $k+1$ chiffres, remarquons que $n' = 10\overline{a_1 a_2 \dots a_k} + a_{k+1}$, d'après l'hypothèse de récurrence, on a $a_1 a_2 \dots a_k < \overline{a_1 a_2 \dots a_k}$, on peut supposer que $a_{k+1} \neq 0$, car dans le cas contraire, l'inégalité est triviale, donc :

$$\begin{aligned} P(n') &= a_1 a_2 \dots a_k a_{k+1} < a_{k+1} \overline{a_1 a_2 \dots a_k} \leq 10 \overline{a_1 a_2 \dots a_k} < 10 \overline{a_1 a_2 \dots a_k} + a_{k+1} \\ &= n', \end{aligned}$$

et ceci montre que notre inégalité est vraie à l'ordre $k+1$.

Deuxième preuve :

On suppose que tous les chiffres du nombre n sont non nuls. Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} P(n) &= a_1 a_2 \dots a_k \leq a_1 9^{k-1} < a_2 10^{k-2} + \dots + a_{k-1} 10 = \overline{a_1 a_2 \dots a_k} \\ &= n, \text{ et ceci achève notre preuve.} \end{aligned}$$

Remarque : L'inégalité $P(n) \leq n$ est vérifiée pour tout entier naturel n , et l'égalité a lieu si et seulement si n a un seul chiffre.

Il est clair que les nombres 0 et 1 ne sont pas des solutions du problème, pour n entier supérieur ou égal à 3. On a $1002n > 2006$, donc $P(n) = n^2 + 1002n - 2006 > n^2$ et, par suite, $n^2 < P(n) \leq n$, ce qui est impossible. Donc la seule possibilité qui reste est $n = 2$ qui est, effectivement, l'unique solution du problème.

Commentaire^{1 2 3}

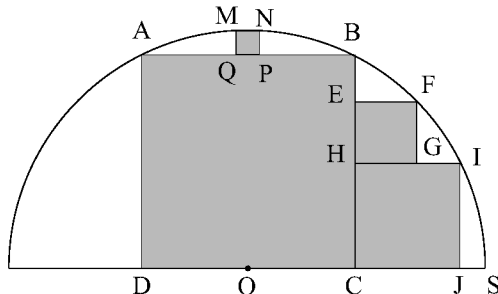
Dans la construction de ce problème, je me suis inspiré du problème n° 2 proposé par l'ex-république de Tchécoslovaquie à l'Olympiade Internationale 1968, qui s'était déroulée à Moscou.

Exercice n° 2

Enoncé

Des carrés dans un demi-cercle

$ABCD$ est un carré inscrit dans un demi-cercle de centre O dont le côté $[CD]$ est porté par le diamètre. (voir figure ci-dessous).



1. Démontrer que la médiatrice du segment $[CD]$ passe par le point O .
2. Donner une construction à la règle et au compas du carré $ABCD$ connaissant le point O et le demi-cercle de centre O .
3. Soit $HIJC$ le carré construit comme l'indique la figure.
Donner une construction à la règle et au compas de ce carré.
4. On désigne par a et b les mesures respectives des côtés des carrés $ABCD$ et $HIJC$.
a) Montrer que $a^2 = 2b^2 + ab$.

¹D. Gerll, G. Girard, *Les Olympiades internationales de mathématiques*, Classiques Hachette, 1976

²*Olympiades Mathématiques de Première 2001*, p. 85, Brochure APMEP n° 142. Co-édition APMEP-ACL Kangourou.

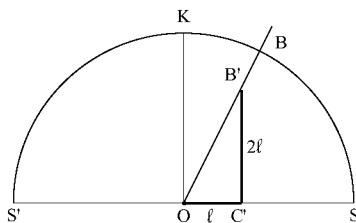
³M. Becheanu, *International Mathematical Olympiad 1959-2000*, Ed. Academic Distribution Center Freeland, Maryland 2001.

- b) Combien vaut le rapport $\frac{a}{b}$?
- c) Le cercle de centre C de rayon CE passe-t-il par le centre du carré $ABCD$?
- d) Quelles sont les valeurs de a et b si le rayon du demi-cercle est 1 ?
 Dans ce cas, déterminer les mesures des côtés des carrés $EFGH$ et $MNPQ$ représentés sur la figure.

Solution

1°) On a $OA = OB$ donc O appartient à la médiatrice de $[AB]$ et puisque $ABCD$ est un carré, $[AB]$ et $[CD]$ ont la même médiatrice, donc O est sur la médiatrice de $[DC]$.

2°) Avec la règle et le compas, on peut construire des perpendiculaires et des bissectrices. On note S et S' les extrémités du diamètre. On construit la perpendiculaire au diamètre passant par O et on note K le point d'intersection avec le cercle. On choisit une longueur ℓ et on construit le segment $[OC']$ de longueur ℓ sur $[OS]$.



On construit la perpendiculaire à $[OS]$ passant par C' . On reporte deux fois la longueur ℓ sur la demi-droite ainsi construite et on obtient un point B' . Il reste à prolonger le segment $[OB']$. Il coupe le cercle en B . On construit ensuite A , C et D à l'aide de perpendiculaires.

3°) Pour construire le point I , on construit la bissectrice de l'angle $\widehat{BCS}$, I est le point d'intersection avec le cercle. A l'aide de perpendiculaires, on construit ensuite H et J .

4°) a) Soit r le rayon du cercle. Pythagore dans le triangle OCB , donne :

$$r^2 = a^2 + \frac{a^2}{4}.$$

Et dans le triangle OIJ , $r^2 = \left(b + \frac{a}{2}\right)^2 + b^2$ d'où le résultat.

N.D.L.R. La relation $a^2 = 2b^2 + ab$ est homogène en a et b . Toute relation homogène par rapport à deux variables s'exprime rationnellement en fonction de l'un et l'autre de leurs rapports. Ainsi, toute relation homogène sur $\cos x$ et $\sin x$ s'exprime en fonction de $\tan x$.

b) En divisant la relation obtenue par b^2 , on obtient que $\frac{a}{b}$ est solution de $x^2 - x - 2 = 0$, donc $\frac{a}{b} = 2$.

c) Notons c la mesure du côté du carré $HGFE$, et Ω le centre du carré $ABCD$. Le cercle de centre C et de rayon CE a donc pour rayon $b + c$. D'autre part $C\Omega$ est égal à $b\sqrt{2}$. La question est donc de savoir si $b + c = b\sqrt{2}$. En fait, $O\Omega HC$ est un carré de côté b . Donc l'angle $\widehat{COH}$ mesure 45° ; de même l'angle $\widehat{GHF}$ mesure aussi 45° . Les points O , H et F sont donc alignés.

On obtient alors : $r = (b + c)\sqrt{2}$, car $OF = r$; On a aussi $r = b\sqrt{5}$ car $OI = r$. Donc on a finalement $b + c = b \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ et donc le point Ω n'appartient pas au cercle de centre C de rayon CE .

d) Si le rayon est 1, on obtient $a = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $b = \frac{\sqrt{5}}{5}$ puis $c = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{5}$ puisque $r = (b + c)\sqrt{2}$, et enfin pour obtenir d , longueur du côté du carré $MNPQ$, on écrit : $ON^2 = 1 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + (a + d)^2$, en utilisant Pythagore.

On obtient $d = \frac{-8\sqrt{5} + 2\sqrt{105}}{25}$.

Commentaire

issu d'un texte - plus ambitieux - d'Abderahim Ouardini (Cf. journal *Revista Escolar de la OIM*)

Quelques candidats ont cru que le côté du carré $EFGH$ est la moitié de celui du carré $HIJC$. Cela, par extrapolation du résultat de la question 4.b).

Un tracé soigné montre qu'il n'en est rien.

Mais voici une étude théorique plus générale :

On pourrait créer une suite de carrés pareillement construits avec un côté sur $[BC]$ et un sommet sur l'arc $\widehat{SB}$.

Cf. figures ci-dessous où :

- I est sur la bissectrice de $\widehat{SCB}$,
- F est sur celle de $\widehat{IHB}$,
- S est sur la bissectrice de $\widehat{FEB}$,
- pour le carré suivant $RKLT$, L est sur la bissectrice de $\widehat{JRB}$,
- etc.

