

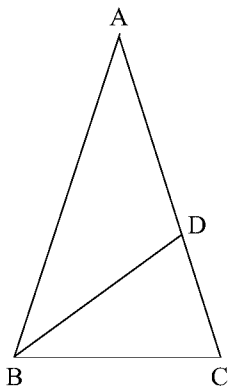
BESANÇON

Exercice n° 1

Enoncé

Le triangle d'or

Le triangle d'or est le nom donné à la jolie région du Jura comprenant les petites villes d'Arbois (son vin!), Poligny (son Comté!), Salins-les-Bains (sa saline et ses forts) et Arc-et-Senans (sa saline royale). A l'instar du triangle dont il est question ici, cette région est une merveille du tourisme.



ABC est un triangle isocèle de sommet A « très particulier ».

En effet, en menant de B la bissectrice du secteur ABC , on constate qu'elle coupe $[AC]$ en un point D tel que BCD est à son tour un triangle isocèle de sommet B .

1. Montrer que la mesure en radians de l'angle $\widehat{BAC}$ est $\frac{\pi}{5}$.
2. Donner alors la mesure en radians des autres angles de cette configuration.
3. Montrer que $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD}$.
4. Sachant que $BC = 1$, déterminer AB .
5. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Solution

1. Notons $\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{ABD}$ et $\gamma = \widehat{ABC}$

Comme les triangles ABC et BCD sont isocèles, les angles à la base sont égaux,

donc :

$$\gamma = \widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{CDB}$$

Comme (BD) est bissectrice du secteur ABC :

$$\beta = \widehat{ABD} = \widehat{CBD} \text{ et } \gamma = 2\beta.$$

Dans le triangle BCD , la somme des angles a pour valeur π , donc :

$$\widehat{CBD} + \widehat{BCD} + \widehat{CDB} = \pi \text{ soit } \beta + 2\gamma = \pi.$$

Comme $\gamma = 2\beta$, il vient donc $5\beta = \pi$ d'où $\beta = \frac{\pi}{5}$ d'où $\gamma = \frac{2\pi}{5}$.

Dans le triangle ABC , la somme des angles a pour valeur π .

Donc $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{BCD} = \pi$ soit : $\alpha + 2\gamma = \pi$;

il vient donc $\alpha + 2 \times \frac{2\pi}{5} = \pi$ soit $\alpha = \frac{\pi}{5} = \beta$, donc $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{5}$.

2. ...

3. Les triangles ABC et BCD sont donc semblables puisqu'ils ont leurs angles deux à deux égaux :

$$\alpha = \widehat{BAC} = \beta = \widehat{CBD} = \frac{\pi}{5} \text{ et } \gamma = \widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{CDB} = \frac{2\pi}{5}$$

Donc leurs côtés sont proportionnels et $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD}$ (1)

4. Comme $\alpha = \beta$, le triangle ADB est isocèle donc $AD = DB$.

Comme CBD est isocèle : $DB = BC$; donc $AD = DB = BC = 1$.

Notons $x = AB$; il vient dans (1) :

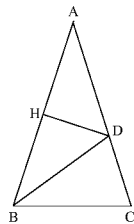
$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \text{ soit } x^2 - x = 1, \text{ et comme } x > 0, x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

5. Comme le triangle ADB est isocèle, la hauteur issue de D coupe (AB) en H milieu de $[AB]$.

$$\text{Donc } AH = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}(1+x) = \frac{1}{2}x^2.$$

Dans le triangle ADH ,

$$\cos \hat{A} = \frac{AH}{AD} = \frac{x^2/2}{x} = \frac{x}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$



Commentaires

Le problème est très joli car il permet de calculer $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\Phi}{2}$ où Φ est le nombre d'or avec des arguments géométriques simples. La solution de Prépa avec résolution de $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$ ne fait pas le poids ! Noter que la question 3 se résout aussi avec Al-Kashi mais surtout par la loi des sinus :

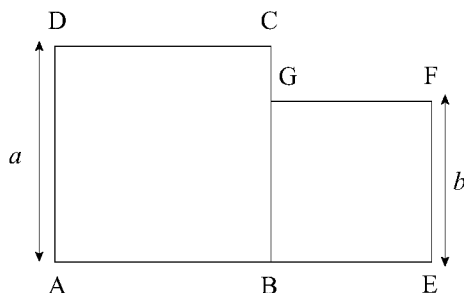
$$\boxed{\frac{AB}{AC} = \Phi = \frac{\sin(2\pi/5)}{\sin(\pi/5)}}$$

Une merveille!...

Exercice n° 2

Enoncé

Deux carrés en un



$ABCD$ et $BEFG$ sont deux carrés dont les côtés ont pour longueurs respectives a et b , de telle sorte que $a > b$.

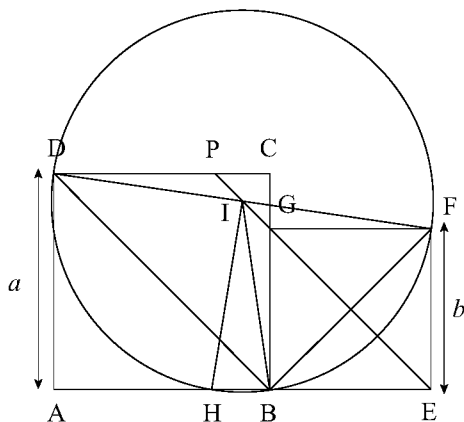
- 1) Soit I le point d'intersection des droites (EG) et (DF) . Démontrer que I est le milieu du segment $[FD]$.
- 2) Soit Γ le cercle de centre I passant par le point B . On note H le deuxième point d'intersection de Γ avec la droite (AB) . Justifier que $[FD]$ est un diamètre de Γ , puis démontrer que la droite (IH) est la médiatrice de $[FD]$.
- 3) Soit J le point d'intersection des droites (BG) et (HF) . On « découpe » la figure initiale selon les triangles EFH , FGJ , ADH et le quadrilatère $CDHJ$. Montrer qu'en assemblant ces 4 polygones sans les superposer, on peut reconstituer un carré. Faire un dessin avec $a = 4$ cm et $b = 3$ cm.
- 4) Exprimer la longueur $c = DH$ en fonction de a et b .

Référence : sujet conçu pour justifier le découpage apparaissant dans le livre *Les inattendus mathématiques* de J.-P. Delahaye, éd. Belin-Pour la science (chap. 6, p.70)

Commentaires : Ce problème est l'étape principale de la démonstration du théorème suivant :

« Etant donnés deux polygones A et B de mêmes aires, il est possible de découper le polygone A en un nombre fini de polygones qui, recombinaison sans chevauchement, permettent de reconstituer le polygone B . » Ce théorème a été démontré au XIX^{ème} siècle par les mathématiciens Lowry, Wallace, Bolyai et Gerwein (voir l'ouvrage cité en référence).

Solution



Question 1 :

Soit P le point d'intersection des droites (EG) et (CD) . $ABCD$ et $BEFG$ sont des carrés, donc : $\widehat{ABD} = \frac{\pi}{4}$ et $\widehat{AEP} = \frac{\pi}{4}$.

Donc les droites (BD) et (EP) sont parallèles. De plus, les droites (DP) et (BE) sont parallèles ; donc, $DPEB$ est un parallélogramme. Donc : $DP = BE = b$.

Or, (DP) est parallèle à (FG) , donc, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{ID}{IF} = \frac{IP}{JG} = \frac{DP}{FG}$$

Mais, $DP = FG = b$, donc $\frac{ID}{IF} = 1$, c'est-à-dire $ID = IF$. Donc

I est le milieu de $[FD]$.

Autre méthode plus simple :

utiliser Thalès dans le triangle BFD , (EG) médiatrice du segment $[BG]$ étant parallèle à (BD) .

Question 2 :

Le cercle Γ a pour rayon $R = IB$ et pour centre I . Or, I est le milieu de $[FD]$, donc, pour montrer que $[FD]$ est un diamètre de Γ , il suffit de prouver que $IF = R$.

$BEFG$ est un carré, donc (EG) est la médiatrice de $[BF]$. Or $I \in (EG)$, donc $IB = IF = R$.

Donc $[FD]$ est bien un diamètre de Γ .

B et F appartiennent au cercle Γ de centre I , donc BIF est un triangle isocèle en I .

Donc : $\widehat{BIF} + 2\widehat{FBI} = \pi$.

Par ailleurs : $\widehat{FBI} = \pi - (\widehat{EBF} + \widehat{IBH}) = \pi - \left(\frac{\pi}{4} + \widehat{IBH}\right) = \frac{3\pi}{4} - \widehat{IBH}$.

De plus, B et H appartiennent au cercle Γ de centre I , donc BIH est un triangle isocèle en I .

Donc : $\widehat{BIH} + 2\widehat{IBH} = \pi$.

Donc : $\widehat{BIH} = \pi - 2\widehat{IBH} = \pi - 2\left(\frac{3\pi}{4} - \widehat{FBI}\right) = 2\widehat{FBI} - \frac{\pi}{2}$
 $= \left(\pi - \widehat{BIF}\right) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \widehat{BIF}$.

Par conséquent : $\widehat{BIH} + \widehat{BIF} = \frac{\pi}{2}$.

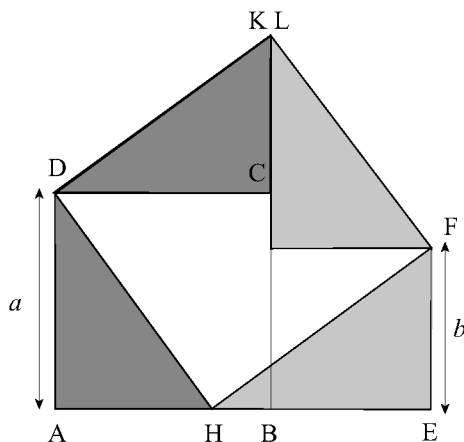
Donc $\widehat{HIF} = \widehat{BIH} + \widehat{BIF} = \frac{\pi}{2}$ et par conséquent : $(IH) \perp (IF)$.

I est le milieu de $[FD]$ et (IH) est orthogonale à $[FD]$, donc (IH) est la médiatrice de $[FD]$.

Autre méthode :

- introduisant la médiatrice de la corde $[HB]$: elle coupe (AE) en un point J .
- utiliser le théorème de Thalès : I milieu de $[DF]$ donc J milieu de $[AE]$.
- en déduire que $AH = BE = EF$
 puis $AD = AH + HB = HB + BE = HE$.
- en déduire que les triangles DAH et HEF sont superposables.
- Ainsi $DH = HF$ donc H est sur la médiatrice de $[DF]$.

Question 3 :



On fait tourner le triangle AHD autour du point D d'un angle de $\frac{\pi}{2}$. L'image du point A est le point C et l'image du point H est un point que l'on note K . Les points K, C et G sont alignés.

- Γ est un cercle de diamètre $[FD]$ et $H \in \Gamma$, donc (HD) est orthogonale à (HF) .
- H appartient à la médiatrice de $[FD]$, donc $HF = HD$.
- Par construction : $DK = DH$.
- $\widehat{HDK} = \widehat{HDC} + \widehat{CDK} = \widehat{HDC} + \widehat{ADH} = \frac{\pi}{2}$, donc (KD) est orthogonale à (HD) .

De ces 4 points, on déduit que le quadrilatère $DHFK$ est un carré.

De la même façon, on fait tourner le triangle EFH autour du point F d'un angle de $-\frac{\pi}{2}$. L'image du point E est le point G et l'image du point H est un point que l'on note L . Les points L, C et G sont alignés.

De la même manière que ci-dessus, on démontre que le quadrilatère $DHFL$ est un carré. Deux carrés ayant trois sommets en commun sont identiques, donc $K = L$. Par conséquent, en superposant AHD à ACK et FEH à FGK , on reconstitue bien un carré, en l'occurrence, le quadrilatère $DHFK$.

Question 4 :

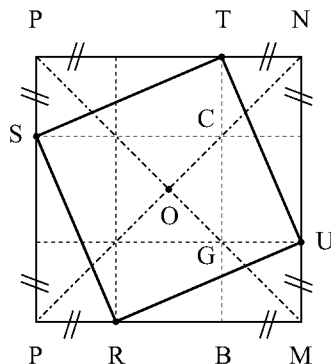
Le carré $DHFK$ a pour aire c^2 .

Or, ce carré a même aire que la réunion des deux carrés $ABCD$ et $BEFG$, c'est-à-dire $a^2 + b^2$.

Donc $c^2 = a^2 + b^2$ et, par conséquent : $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Note d'Henri BAREIL

Ce problème des « deux carrés en un » rappellera à certains la classique figure suivante où $LMNP$ est un carré de centre O .



- ① Cette figure est invariante dans toute rotation $(O, k\frac{\pi}{2})$ avec k entier.

Il s'ensuit que $RSTU$ est aussi un carré.

Soit $PT = a$, $TN = b$ et $ST = c$.

Cette figure peut être utilisée, sans parler du carré $RSTU$ pour établir que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

En utilisant le carré $RSTU$ on établit que $c^2 = a^2 + b^2$, donc la relation de Pythagore.

- ② La figure étudiée par cet « EXERCICE n° 2 de Besançon est **nichée** dans la figure ci-dessus, par exemple avec le carré $LBCS$ joint au carré $BGUM$. La somme de ces aires est $a^2 + b^2$, c'est-à-dire c^2 .

Il s'agit donc, à partir des deux carrés initiaux, de reconstituer le carré $SRUT$, ce qui est immédiat à partir du report de BM en LR .

On retrouve d'ailleurs cela en constatant que LSR et GTU se correspondent par translation, ainsi que RMU et SCT d'où un réaménagement (celui de l'énoncé) de $SLBC + BGUM$ en $SRUT$.

L'énoncé proposé retrouve le rôle « central » du point O de la figure ci-dessus en faisant intervenir le point I (qui est le point O).

Mais en ne reconstituant pas le « grand carré » $LMNP$, l'énoncé procède par petites touches dont le choix pourrait relever de « pourquoi cette étape ? » alors qu'il s'agit de récupérer tout ou partie de la grande figure de la présente note, d'autres progressions étant évidemment possibles.