

AMIENS

Exercice n° 1

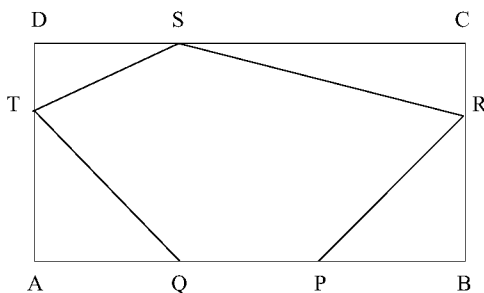
Enoncé

Le billard

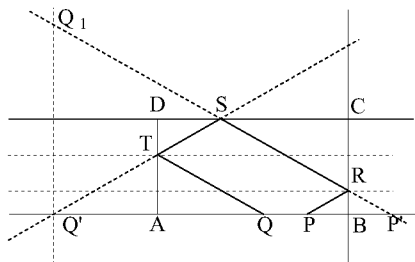
(Séries ES et L)

On considère une table de billard rectangulaire $ABCD$. P et Q sont donnés sur $[AB]$.

Où la balle, partant de P , doit-elle frapper en R sur $[BC]$ pour qu'après un rebond sur chacun des deux autres côtés elle revienne en P ?



Solution



On construit les symétriques P' de P par rapport à (BC) et Q' de Q par rapport à (AD) puis Q_1 de Q' par rapport à (DC) . R est l'intersection de (Q_1P') et de (BC) .

Exercice n° 2

Enoncé

(Séries ES et L)

Soient deux réels strictement positifs x et y .

- 1) Démontrer que $x + y \geq 2\sqrt{xy}$. Dans quel cas a-t-on l'égalité ?
- 2) En déduire les deux résultats indépendants suivants :
 - a) Si x, y et z sont des réels strictement positifs, alors
 $(x + y)(y + z)(z + x) \geq 8xyz$, dans quel cas a-t-on l'égalité ?
 - b) Si x et y sont des réels strictement positifs, déterminer le minimum du produit

$$\sqrt{x + y} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right)$$

Solution

- 1) $x + y - 2\sqrt{xy} = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$
- 2) $x + y \geq 2\sqrt{xy} \quad y + z \geq 2\sqrt{yz} \quad z + x \geq 2\sqrt{zx}$.

On multiplie membre à membre ces trois inégalités entre nombres positifs.

CQFD. Avec égalité si et seulement si $x = y = z$.

- 3) $x > 0$ et $y > 0$ donc $x + y \geq 2\sqrt{xy}$

$$\text{donc } \sqrt{x + y} \geq \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{xy}} \text{ et } \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{y}}}$$

par multiplication membre à membre, on obtient :

$$\sqrt{x + y} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \geq 2\sqrt{2}.$$

Avec égalité si $x = y$.

Exercice n° 3

Enoncé

Le partage équitable

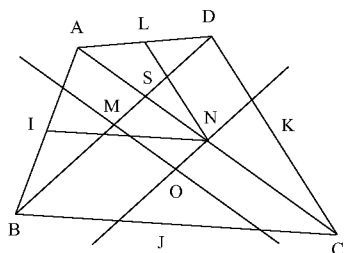
(Série S)

$ABCD$ est un quadrilatère convexe quelconque.

I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

Où doit-on placer un point O tel que les quadrilatères $OIAL$, $OJBI$, $OKCJ$ et $OLDK$ aient la même aire ?

Solution 1



M est le milieu de $[BD]$ et N est le milieu de $[AC]$.

Le quadrilatère $NIAL$ est l'image par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$ de $CBAD$. Son aire est égale à $\frac{1}{4}$ de l'aire de $ABCD$.

Tout quadrilatère $N'IAL$ dont le sommet N' se trouve sur la parallèle à (BD) passant par N a la même aire. Il en va de même pour le quadrilatère $N'KCK$.

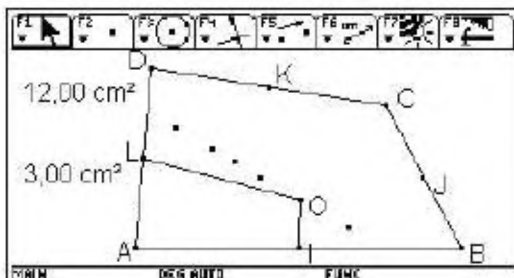
Pour les mêmes raisons tout quadrilatère $M'JBI$ ou $M'LDK$ a une aire égale à $\frac{1}{4}$ de l'aire de $ABCD$ pourvu que M' soit sur la parallèle à (AC) passant par M .

Il suffit donc que M' soit sur la parallèle à (AC) passant par M et sur la parallèle à (BD) passant par N . O est le quatrième sommet du parallélogramme de sommets M , S et N .

Solution 2 (A. Guillemot)

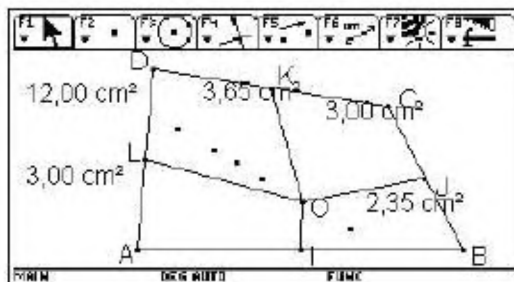
Approche Cabri

Recherchons quelques positions de O telles que l'aire de $AIOL$ soit le quart de l'aire de $ABCD$

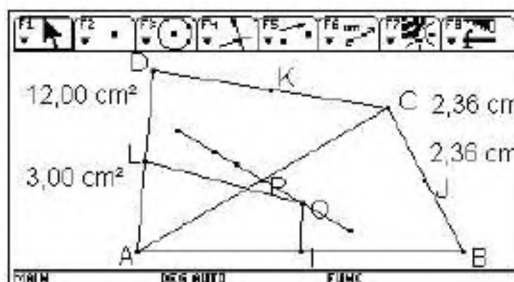


Il semble que tous les points trouvés soient sur une parallèle d à la diagonale $[BD]$.

Regardons comment varie l'aire des trois autres quadrilatères de sommet O quand celui-ci parcourt d .



Il semble que l'aire de $OJCK$ soit toujours le quart de l'aire de $ABCD$.
La droite d coupe la diagonale $[AC]$ en P . Mesurons AP et BC .



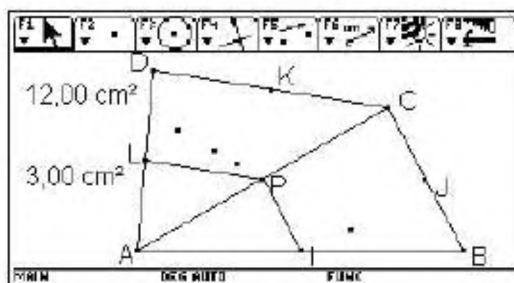
P semble être le milieu de $[AC]$.

Résumé de nos observations :

O semble être sur la parallèle à $[BD]$ passant par le milieu de $[AC]$ et dans ce cas l'aire de $OJCK$ est aussi le quart de l'aire de $ABCD$.

Démonstration.

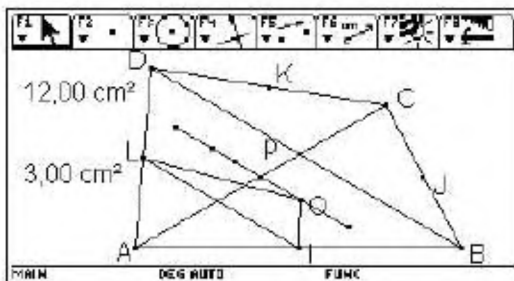
Montrons d'abord que l'aire de $AIPL$ est le quart de l'aire de $ABCD$.



I , P et L sont les milieux de $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$, donc le quadrilatère $AIPL$ est l'image de $ABCD$ dans l'homothétie de centre A et de rapport $1/2$. Donc l'aire de $AIPL$ est le quart de l'aire de $ABCD$. De la même manière l'aire de $PJCK$ est le quart de celle de $ABCD$.

Soit d la parallèle à (BD) passant par P . O un point de cette droite. Montrons

que l'aire de $AIOL$ ne varie pas quand O parcourt d .



Le quadrilatère est formé du triangle AIL qui ne varie pas et du triangle IOL . I et L étant les milieux de $[AB]$ et de $[AD]$, la droite (IL) est parallèle à (BD) donc d et (IL) sont parallèles.

Dans le triangle IOL , la hauteur relative au côté $[IL]$ est toujours la distance entre les droites d et (IL) . IOL a donc toujours la même aire.

De la même manière, $OJCK$ garde la même aire quand O parcourt d .

En reprenant le même raisonnement, tout point Q de la parallèle d' à (AC) passant par le milieu de $[BD]$ donne des quadrilatères $QIBJ$ et $QKDL$ qui ont une aire égale au quart de l'aire de $ABCD$.

Conclusion.

O sera à l'intersection de deux droites, chacune d'entre elles étant parallèle à une diagonale et passant par le milieu de l'autre.

Exercice n° 4

Enoncé

(Série S)

Prouver que parmi cinq nombres réels positifs donnés on peut trouver deux réels a et b tels que

$$0 \leq \frac{a}{1+a^2} - \frac{b}{1+b^2} \leq \frac{1}{8}.$$

Solution 1

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

Son maximum sur $[0; +\infty[$ est $\frac{1}{2}$. En effet $1+x^2-2x = (1-x)^2 \geq 0$, donc

$$1 + x^2 \geq 2x \text{ et } f(x) \leq \frac{1}{2}; f(1) = \frac{1}{2}.$$

Par ailleurs, f prend au moins une fois toutes les valeurs entre 0 et $\frac{1}{2}$.

L'équation $\frac{x}{1+x^2} = a$ avec $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$, admet des solutions dans $[0; +\infty[$

$$\left(\frac{x}{1+x^2} = a \Leftrightarrow x^2 - \frac{x}{a} + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2a}\right)^2 - \left(\frac{1}{4a^2} - 1\right) = 0 \dots \right)$$

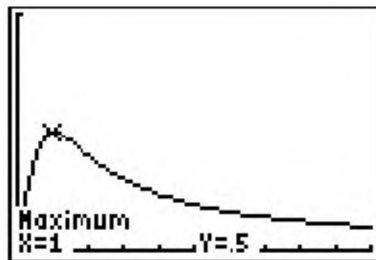
Soit cinq nombres positifs, les images par f prennent au plus 5 valeurs de l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ donc il y a au moins deux nombres dans un des quatre intervalles $\left[0; \frac{1}{8}\right]; \left[\frac{1}{8}; \frac{1}{4}\right]; \left[\frac{1}{4}; \frac{3}{8}\right]; \left[\frac{3}{8}; \frac{1}{2}\right]$.

Soit a et b ces deux nombres. Alors $0 \leq f(a) - f(b) \leq \frac{1}{8}$ (amplitude de cet intervalle).

Solution 2

Approche calculatrice d'A. Guillemot.

Représentons à l'aide de la calculatrice la fonction f définie sur $\mathbf{R}^+$ par $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.



À la lecture graphique, il semble que l'image de $\mathbf{R}^+$ par f soit l'intervalle $[0; 1/2]$.

Prouvons cette conjecture.

Pour tout x positif, $(x-1)^2 \geq 0$, c'est à dire $x^2 + 1 \geq 2x$

En divisant par $x^2 + 1$ qui est toujours positif, on a $1 \geq \frac{2x}{x^2 + 1}$

Donc $f(x) \leq \frac{1}{2}$

Soit a, b, c, d et e cinq nombres réels positifs.

$f(a), f(b), f(c), f(d)$ et $f(e)$ sont cinq nombres de l'intervalle $[0; 1/2]$.

Partageons l'intervalle $[0; 1/2]$ en quatre intervalles de longueur $1/8$

$I_1 = [0; 1/8[, I_2 = [1/8; 1/4[, I_3 = [1/4; 3/8[$ et $I_4 = [3/8; 1/2]$.

Comme il y a cinq nombres et quatre intervalles, il y a forcément deux nombres dans un même intervalle en se référant au principe des tiroirs.

Donc la distance entre ces deux nombres est inférieure ou égale à $1/8$.

Rapport et palmarès

Le groupe académique

Il est composé des membres suivants :

BOULANGER Jacques	Lycée Pierre d'Ailly	Compiègne
DELIAN Arnaud	Lycée Jean Rostand	Chantilly
GONZAL Christiane	Lycée Marie Curie	Nogent sur Oise
HUET Michel	Lycée Leonard de Vinci	Soissons
LILLONI Bruno	Lycée Jean Monnet	Crépy en Valois
POMAGEOT Loïc	Lycée Jules Urhy	Creil
TIXIER Michel	Lycée Michelis	Amiens

Déroulement de l'épreuve

L'épreuve s'est déroulée le mercredi 15 mars 2006 de 14h à 18h. Le nombre des inscriptions est en constante augmentation sur l'académie : 20 lycées ont ainsi participé, ce qui représente 244 élèves (77% d'entre eux ont effectivement participé aux épreuves).

Bilan pour l'année 2006

Nous notons avec satisfaction l'implication des professeurs de mathématiques pour la préparation des élèves. Dans certains établissements, elle prend la forme d'ateliers mathématiques ou de clubs, qui proposent aux élèves des activités ouvertes, en lien avec la culture scientifique. Il s'agit entre autre de développer la démarche scientifique, basée sur l'expérimentation, la conjecture et la preuve, en s'inscrivant pour les élèves de S dans une poursuite d'études scientifiques. Un effort reste à faire notamment en direction des filles, notons toutefois que c'est une candidate qui tient la tête des deux palmarès.

Conclusion

Il y a lieu de se réjouir des conséquences et de l'impact de ces olympiades de mathématiques :

- d'abord en direction des élèves : bien que difficile à évaluer, le fait d'avoir eu plaisir à faire des mathématiques et à rechercher est sans doute lourd de conséquences quant aux choix d'un jeune pour son avenir.
- ensuite en direction des professeurs par la dynamique lancée au sein de leurs établissements.

Nous tenons à remercier chaleureusement nos partenaires qui apportent leur contribution à la réussite de ce concours :

- * L'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public offre un livre de mathématique (« le fascinant nombre pi ») aux trois premiers.
- * La revue de mathématiques « Tangente » offre vingt lots (livres ou numéros hors série)
- * Texas instruments offre 4 calculatrices
- * Casio offre 6 calculatrices.
- * la Région participe également à cette remise des prix.

Enfin, nous tenons à remercier également tous ceux qui contribuent à la réussite de cette compétition, en particulier les membres de l'équipe académique, les chefs d'établissement, les services rectoraux et l'UPJV pour la qualité de son accueil.

Palmarès

PREMIERE S

Premier Prix : Claire DUFETRELLE Lycée Gay Lussac (Chauny)

Deuxième Prix : Rémi HOSSEINI-KAZRONI Lycée Jean Calvin (Noyon)

Troisième Prix : Cédric LEROY Lycée Gay Lussac (Chauny)

PREMIERE ES

Premier prix : Pauline APCHIN Lycée Jean Baptiste Delambre (Amiens).