

AIX-MARSEILLE

Exercice n° 1

Enoncé

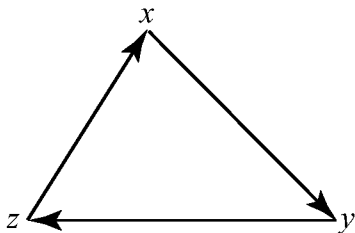
Le tournoi

(Série S)

Soit un entier naturel n supérieur ou égal à 5. n équipes disputent un tournoi de football, chacune des équipes rencontrant une fois seulement chacune des autres. Une victoire rapporte 3 points à l'équipe gagnante, 0 point à l'équipe perdante et un match nul rapporte 1 point à chacune des équipes. À la fin du tournoi, trois équipes ont exactement 3 points. Prouver que toutes les autres équipes, sauf peut-être une, ont au moins 8 points.

Solution

Dans les figures qui suivent, une flèche d'une équipe x vers une équipe y signifie que x a battu y . Un trait entre x et y signifie que x et y ont fait match nul. Etudions d'abord les résultats entre les trois équipes qui ont 3 points. Appelons x , y , et z ces équipes. Supposons qu'une des équipes, disons x a battu une autre des trois équipes, disons y . Alors l'équipe x a perdu contre z car sinon elle aurait plus de 3 points. Alors, pour la même raison l'équipe z a perdu contre y . La situation est schématisée ci-dessous :

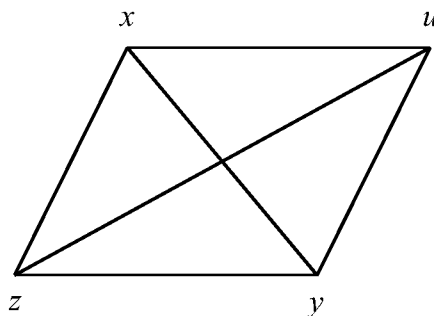


Alors toute autre équipe u a battu chacune des équipes x , y et z , sinon une de ces équipes aurait plus de 3 points. Cela fait au moins 9 points pour u et le résultat est prouvé.

L'autre possibilité est que les trois équipes x , y et z n'ont fait que des matches nuls entre elles, ce qui fait déjà 2 points pour chacune d'entre elles. Alors n'importe quelle autre équipe ne peut pas avoir perdu contre une des équipes x , y et z , car alors une des équipes x , y et z aurait plus de 3 points. Parmi les équipes autres que x , y et z , soit u une équipe qui a eu un minimum de points. Si elle a eu au moins 8 points le résultat est prouvé.

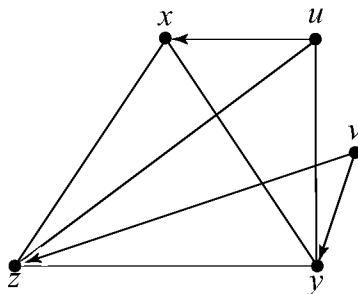
Supposons qu'elle a eu moins de 8 points. Il y a trois possibilités pour les résultats des matches entre u et les équipes x , y et z :

Premier cas : u a fait match nul contre chacune des équipes x , y et z (Voir figure ci-dessous)



Chacune des équipes x , y et z a trois points, ce qui fait qu'elles ont perdu tous leurs autres matches, ce qui veut dire aussi que toute équipe v , autre que x , y , z et u a battu chacune des équipes x , y , z , ce qui fait 9 points pour v . Le résultat est donc prouvé dans ce cas.

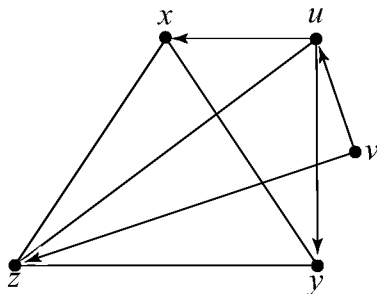
Deuxième cas : u a battu une des équipes x , y , z , disons x et a fait match nul contre les deux autres. Soit v une équipe autre que x , y , z et u . Alors l'équipe v a gagné contre y et z , sinon y ou z aurait plus de 3 points (Voir figure ci-dessous) et a fait au moins match nul avec x .



De plus elle n'a pas perdu contre u car alors u aurait au moins 8 points. Par conséquent v au moins $3 + 3 + 1 + 1 = 8$ points et le résultat est prouvé.

Troisième cas : u a battu deux des équipes x, y, z , disons x et y et a fait match nul contre la troisième, donc contre z .

Soit v une équipe autre que x, y, z et u . Alors v a battu z car sinon z aurait plus de 3 points et v a battu aussi u car sinon u aurait au moins 8 points (Figure ci-dessous)



Comme u n'a perdu ni contre x ni contre y , l'équipe u aura au moins $3 + 3 + 1 + 1 = 8$ points et le résultat est prouvé.

La preuve est donc donnée.

Exercice n° 2

Enoncé

L'Encyclopédie

(pour toutes les séries)

Léo possède une encyclopédie constituée de n tomes, où n est un entier compris entre 5 et 20. ($5 \leq n \leq 20$). Tous les tomes ont le même nombre de pages. La numérotation de chaque tome commence à la page 1. Toutes les pages sont numérotées.

Pour numéroter la totalité des n tomes, on a utilisé 2 006 fois le chiffre 5.

De combien de tomes est constituée l'encyclopédie de Léo ? De combien de pages est constitué chacun des tomes ?

Solution

Le nombre n de tomes est un diviseur de 2 006. Or la décomposition de 2 006 en produit de facteurs premiers est : $2\,006 = 2 \times 17 \times 59$. Les diviseurs de 2 006 sont donc 1, 2, 17, 59, 2×17 , 2×59 , 17×59 et 2 006.

Il y a donc 17 tomes car $5 \leq n \leq 20$.

Puisque tous les tomes ont le même nombre de pages, le chiffre 5 a donc été utilisé 118 fois pour numéroté chaque tome.

- Dénombrons le nombre de chiffres 5 utilisé pour la pagination de 1 à 99 :
 - pour chaque dizaine, hormis la cinquantaine, le chiffre 5 est utilisé 1 fois,
 - le chiffre 5 est utilisé 11 fois pour les pages 50 jusqu'à 59.
 Le nombre 5 est donc utilisé 20 fois pour la pagination de 1 à 99.
- Il en est de même pour chaque centaine jusqu'à la page 499.
Le chiffre 5 a alors été utilisé 100 fois.
- Il est à nouveau utilisé 11 fois pour la pagination de 500 à 509 puis 7 fois pour la pagination de 510 à 515.

Chaque tome possède donc **515 pages**.

Exercice n° 3

Enoncé

A table

(Séries L, ES et technologiques)

Cinq personnes ont pris place autour d'une table ronde. Chaque homme a deux femmes à ses côtés et chaque femme a au moins un homme à ses côtés. Combien d'hommes et combien de femmes sont assis autour de la table ? (On justifiera le raisonnement avec soin)

Solution

Notons A, B, C, D et E les cinq personnes installées dans cet ordre autour de la table (dans le sens des aiguilles d'une montre, par exemple).

Si A est un homme :

- Alors B et E, assises à côté de A, sont des femmes.
- C peut, *a priori*, être un homme ou une femme.
 - Si C est un homme, alors B et D, assises à côté de C, sont des femmes.
(Remarque : Pour B, on le savait déjà.)
On vérifie que la configuration correspondante (A : homme, B : femme, C : homme, D : femme, E : femme) vérifie bien les contraintes de l'énoncé.
Dans ce cas **2 hommes et 3 femmes sont assis autour de la table**.
 - Si C est une femme, alors D est un homme (car C doit avoir au moins un homme à ses côtés et B est une femme).
On vérifie que la configuration correspondante (A : homme, B : femme,

C : femme, D : homme, E : femme) vérifie bien les contraintes de l'énoncé.
Dans ce cas aussi **2 hommes et 3 femmes sont assis autour de la table.**

Si A est une femme :

- B ou E sont des hommes.
 - Si B est un homme, on recommence le raisonnement précédent en remplaçant A par B (et donc, B, C, D, E, par C, D, E, A). Dans ce cas aussi, on trouve donc ***que 2 hommes et 3 femmes sont assis autour de la table.***
 - Si E est un homme, on recommence le raisonnement précédent en remplaçant A par E (et donc, B, C, D, E, par A, B , C, D). Dans ce cas aussi, on trouve donc que ***2 hommes et 3 femmes sont assis autour de la table.***

Tous les cas ont été envisagés et on trouve dans tous les cas que **2 hommes et 3 femmes sont assis autour de la table.**