

VERSAILLES

Exercice n° 1 (S,STI)

Enoncé

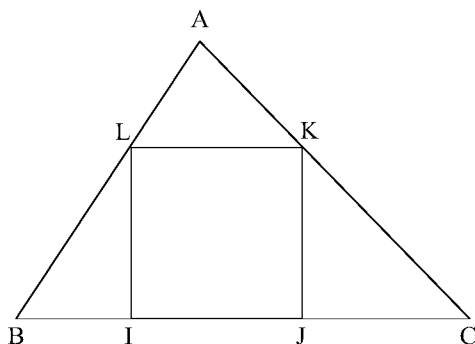
Un carré dans un triangle

On considère un triangle ABC dont les trois angles sont aigus. On pose : $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. On appelle h la hauteur relative à A et S l'aire du triangle ABC .

On inscrit dans ce triangle le carré $IJKL$ tel que :

$I \in [BC]$, $J \in [BC]$, $K \in [AC]$ et $L \in [AB]$, comme sur la figure ci-dessous.

On dit que le carré $IJKL$ est *posé sur* $[BC]$. On appelle C_1 ce carré.

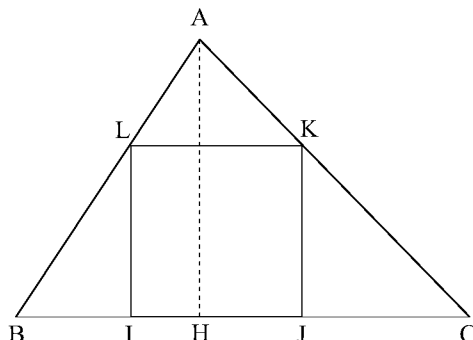


On peut construire de même deux autres carrés C_2 et C_3 inscrits dans le triangle ABC , l'un posé sur $[CA]$, l'autre posé sur $[AB]$.

1. Exprimer le côté du carré $IJKL$ en fonction de a et h .
2. On suppose que : $a \leq b \leq c$. Classer les trois carrés C_1 , C_2 et C_3 par ordre de grandeur.
3. Déterminer les triangles ABC d'aire S donnée tels que l'aire du carré $IJKL$ soit maximale.
4. Existe-t-il des triangles ABC d'aire S donnée tels que les trois carrés soient d'aires maximales ?

Solution

1°)



Soit H le pied et h la longueur de la hauteur relative à A, ℓ le côté du carré.

Par Thalès, on a : $\frac{\ell}{h} = \frac{BI}{BH} = \frac{CJ}{CH} = \frac{BI + CJ}{BH + CH} = \frac{a - \ell}{a} = 1 - \frac{\ell}{a}$

ou $\ell \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{a} \right) = 1$ et $\ell = \frac{ah}{a + h}$.

2°) On a $ah = 2S$ d'où $\ell = \frac{2aS}{a^2 + 2S}$.

De même pour le carré associé à B, $\ell' = \frac{2bS}{b^2 + 2S}$

d'où $\ell - \ell' = \frac{2aS(b^2 + 2S) - 2bS(a^2 + 2S)}{(a^2 + 2S)(b^2 + 2S)}$

$\ell - \ell'$ a le signe de $2S[ab(b - a) + 2S(a - b)] = 2S(b - a)(ab - 2S)$, mais $b \geq h$ donc $ab \geq ah = 2S$ et $b \geq a$ implique $\ell \geq \ell'$.

On en déduit que $a \leq b \leq c$ implique $\ell \geq \ell' \geq \ell''$.

3°) Posons $f(x) = \frac{2xS}{x^2 + 2S}$; on a $f'(x) = \frac{2S}{x^2 + 2S} - \frac{4x^2S}{(x^2 + 2S)^2}$ qui a le signe de $x^2 - 2S$; f passe donc par un maximum pour $x = \sqrt{2S}$ et ce maximum est égal à $\frac{\sqrt{2S}}{2}$.

Si $a = \sqrt{2S}$, on a $h = \sqrt{2S}$: pour tous les triangles ABC tels que A soit à une distance a de [BC] et que H soit compris (strictement) entre B et C, tous les carrés sont d'aire maximale.

4°) S'il existait un triangle tel que les trois carrés soient d'aire maximale, on devrait avoir $a^2 = b^2 = c^2 = 2S$; ABC serait donc équilatéral, mais

dans un tel triangle, $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ et non a .
La réponse est donc NON.

Remarque : une nouvelle variation d'un thème très classique.

Remarques de Pierre Bornsztein

1. Pierre Bornsztein utilise la construction classique de IJKL, à partir du carré de côté [BC] construit extérieurement au triangle ABC, grâce à l'homothétie de centre A qui transforme B en L.
2. A partir de « $\ell - \ell'$ a le signe de $2S(b - a)(ab - 2S)$ », Pierre B. remarque que $2S = ab \sin \widehat{ACB} \leq ab$ et, comme on a supposé $a \leq b$, il s'en déduit $\ell - \ell' \geq 0$. Etc.

Commentaires par Pierre Bornsztein

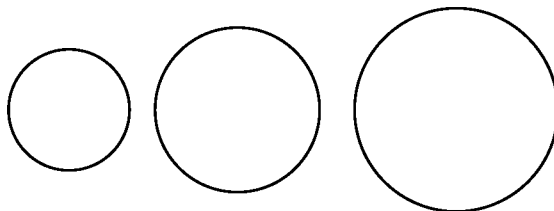
La question 1, facilement traitée par l'homothétie signalée est plus difficile par l'usage direct de Thalès. « La question 2 a été discriminante pour l'exercice et même probablement pour la compétition dans notre académie ». Mais on pouvait, sans la résoudre, continuer l'exercice.

Exercice n° 2 (STT, ES, L)

Enoncé

Trois gâteaux

La figure ci-dessous représente trois gâteaux de forme circulaire. Ils ne diffèrent que par leurs diamètres. Le premier a pour diamètre 6 cm, le second 8 cm et le troisième 10 cm.



Quatre enfants désirent se partager équitablement ces gâteaux : les parts de chacun, même si elles sont constituées de plusieurs morceaux, doivent avoir la même aire totale.

Pour chaque gâteau, on ne s'autorise que des coupes rectilignes passant par le centre.

Quel est le nombre minimal de coupes pour cette répartition ?

Solution

L'aire totale des trois gâteaux est $9\pi + 16\pi + 25\pi = 50\pi \text{ cm}^2$. Il revient donc $12,5\pi$ à chaque enfant.

Une coupe en deux du grand gâteau permet de faire deux parts de $12,5\pi$. On peut alors soit couper en deux parts égales les deux autres gâteaux et donner une part de chaque aux deux enfants restant, soit, en deux coups, couper dans le gâteau moyen une part de $3,5\pi$ (angle au centre $\frac{7\pi}{16}$) et la joindre au petit gâteau.

Remarque : (François Lo Jacomo)

Cet exercice n'est pas très clair. Peut-on, par exemple, aligner les trois gâteaux et les couper tous les trois en deux d'un seul coup de couteau ? Si l'on exclut cette possibilité, il faut au moins trois coupes car il faut couper chacun des deux gros gâteaux (qui chacun sont plus gros qu'une part), et si l'on ne coupe pas le troisième (qui représente 18% de l'aire totale), il faut le compléter par une part représentant 7% de l'aire totale, et qui n'est pas la moitié d'un des deux autres. Donc l'un des deux autres doit subir deux coupes, mais il y a deux manières de couper le gâteau moyen en quatre : dans un cas, il faut deux parts pour obtenir ces 7% et dans l'autre, une seule part.

Par contre, si l'on coupe le gâteau moyen en deux, il faut au moins trois coupes du grand gâteau pour compléter les parts. En définitive, si l'on ajoute la découpe de chaque gâteau en deux, je trouve trois manières de couper ces gâteaux par trois coupes.

Exercice n° 3 (S, STI)

Énoncé

Les cartes

On dispose de 100 cartes. Sur chacune sont écrits deux entiers consécutifs, de sorte que chacun des entiers 1, 2, 3, ..., 199, 200 est écrit sur une et une seule carte.

1. Alice a choisi 21 cartes au hasard. Elle fait la somme de tous les entiers écrits sur ces cartes et annonce à Bob que cette somme est égale à 2004. Prouver qu'Alice s'est trompée dans son calcul.
2. Alice recompte et annonce cette fois 2005. Prouver qu'elle s'est à nouveau trompée dans son calcul.
3. En fait, le total d'Alice est 2003. Pendant ce temps, Bob a choisi 20 cartes au hasard parmi celles qui restaient. Il fait la somme des nombres écrits sur ses cartes et annonce à Alice que cette somme est 1369. Prouver que Bob s'est trompé dans son calcul.

Solution

Appelons carte p celle sur laquelle sont écrits $2p + 1$ et $2p + 2$ avec $0 \leq p \leq 99$.

On a $(2p + 1) + (2p + 2) = 4p + 3$, le reste de la division par 4 de ce nombre est 3.

1°) Il en est de même du reste de la division par 4 de la somme de 21 nombres de cette forme car $21 \times 3 = (20 + 1) \times 3 = 60 + 3$. Or 2004 est divisible par 4 (reste 0) : Alice s'est trompée.

2°) $2005 = 2004 + 1$; Alice s'est encore trompée ; par contre, on a bien $2003 = 2000 + 3$.

3°) La somme des entiers portés par les 41 cartes choisies par Alice et par Bob est au moins égale à

$$\sum_{p=0}^{40} (4p + 3) = 4 \times \frac{40 \times 41}{2} + 41 \times 3 = 3280 + 123 = 3403.$$

Or $2003 + 1369 = 3399 < 3403$: Bob s'est trompé dans son calcul.

Remarque : exercice bien gradué.

Remarques de Pierre Bornsztein, auteur du sujet

Dans son corrigé, Pierre B. ne propose pas la remarque initiale du corrigé précédent. Il s'attache à une solution question par question, moins formalisée :

1. une même carte porte deux entiers consécutifs. Leur somme est forcément impaire. Or la somme de 21 nombres impaires est impaire. . . donc différente de 2004.

2. chacun des nombres 1, 2, 3, ... étant utilisé, une carte porte le nombre 1 donc aussi 2. Une autre carte porte 3 et 4. Etc On rencontre alors la remarque initiale du premier corrigé. La somme des 21 nombres de la forme $4p + 3$ est donc $4n + 21 \times 3$ soit encore $4n' + 3$. Or $2005 = 4k + 1$. D'où...

Commentaires par Pierre Bornsstein

Cet exercice est « typiquement sur les invariants » :

- parité au 1^o, trouvée par la plupart des candidats,
- reste modulo 4 au 2^o, question discriminante (ici avec un troisièmement très lié).

« Notons, dit P.B., que, comme les années précédentes, la sommation des entiers de 1 à n s'impose comme un grand classique de nos Olympiades ».

Exercice n° 4 (STT, ES, L)

Enoncé

Décompositions

Un nombre entier naturel quelconque peut être écrit comme la somme de puissances de 2. On a, par exemple, $6 = 4 + 2$, mais aussi $6 = 2 + 2 + 1 + 1$, ou encore $6 = 2 + 2 + 2$.

Dans cet exercice, on s'intéresse aux décompositions dans lesquelles une même puissance de 2 apparaît au maximum deux fois (par exemple, la dernière décomposition proposée ci-dessus pour 6 ne convient pas). On note $d(n)$ le nombre de telles décompositions du nombre n .

1. Montrer que $d(6) = 3$.
2. Calculer $d(n)$ pour les entiers compris entre 1 et 5.
3. Calculer $d(10)$, $d(11)$, $d(21)$ et $d(22)$.
4. Prouver que $d(2005) = d(1002)$.
5. Calculer $d(2005)$.

Solution

$$1^\circ) 6 = 4 + 2 = 4 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 + 1. \quad d(6) = 3.$$

$$\begin{array}{lll} 2^\circ) & 1 = 1 & \text{donc } d(1) = 1 \\ & 2 = 1 + 1 & \text{donc } d(2) = 2 \\ & 3 = 2 + 1 & \text{donc } d(3) = 1 \\ & 4 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 & \text{donc } d(4) = 3 \\ & 5 = 4 + 1 = 2 + 2 + 1 & \text{donc } d(5) = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3^\circ) 10 = 8 + 2 = 8 + 1 + 1 = 4 + 4 + 2 \\ \quad = 4 + 4 + 1 + 1 = 4 + 2 + 2 + 1 + 1, \quad d(10) = 5 \\ 11 = 8 + 2 + 1 = 4 + 4 + 2 + 1 \quad d(11) = 2 \\ 21 = 16 + 4 + 1 = 8 + 8 + 4 + 1 = 8 + 8 + 2 + 2 + 1 \\ \quad = 8 + 4 + 4 + 2 + 2 + 1 = 16 + 2 + 2 + 1, \quad d(21) = 5. \\ 22 = 16 + 4 + 2 = 16 + 4 + 1 + 1 = 16 + 2 + 2 + 1 + 1 \\ \quad = 8 + 8 + 4 + 2 = 8 + 8 + 4 + 1 + 1 = 8 + 8 + 2 + 2 + 1 + 1 \\ \quad = 8 + 4 + 4 + 2 + 2 + 1 + 1, \quad d(22) = 7 \end{array}$$

$$4^\circ) 2005 = 2 \times 1002 + 1.$$

On peut donc, à chaque décomposition de 1002, associer celle de 2005 obtenue en remplaçant i par $2i$ et inversement, à toute décomposition de 2005, celle de 1002 obtenue en retranchant 1 et en divisant par 2.

$$5^\circ) 1002 = 992 + 10 = 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2$$

Dans la troisième question, nous avons vu que 10 admet deux décompositions commençant par 8 et trois commençant par 4.

Par ailleurs, 992 peut se décomposer de six façons se terminant par 2^5 ou 2^4 :

$$\begin{array}{l} 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 \\ 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^4 \\ 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^5 + 2^5 + 2^4 + 2^4 \\ 2^9 + 2^8 + 2^6 + 2^6 + 2^5 + 2^5 + 2^4 + 2^4 \\ 2^9 + 2^7 + 2^7 + 2^6 + 2^6 + 2^5 + 2^5 + 2^4 + 2^4 \\ 2^8 + 2^8 + 2^7 + 2^7 + 2^6 + 2^6 + 2^5 + 2^5 + 2^4 + 2^4 \end{array}$$

En ajoutant une de ces décompositions de 992 à une de 10, on obtient ainsi $6 \times 5 = 30$ décompositions de 1002.

Considérons alors les cinq décompositions de 992 se terminant par 2^4 , et remplaçons le dernier 2^4 par $2^3 + 2^3$; en ajoutant à une de ces décompositions une des trois décompositions de 10 commençant par 4, on obtient ainsi $5 \times 3 = 15$ décompositions nouvelles de 1 002.

Il n'est pas possible d'en trouver d'autres.

On en déduit : $d(2005) = d(1002) = 30 + 15 = 45$.

Solution (FLJ)

On a $d(2n+1)=d(n)$ et $d(2n)=d(n)+d(n-1)$, car la décomposition de $2n$ ne peut contenir zéro ou deux chiffres 1.

Donc

$$\begin{aligned} d(2005) &= d(1002) = d(501) + d(500) = 2 \times d(250) + d(249) \\ &= 2 \times d(125) + 3 \times d(124) = 5 \times d(62) + 3 \times d(61) \\ &= 5 \times d(31) + 8 \times d(30) = 13 \times d(15) + 8 \times d(15) + 8 \times d(14) \\ &= 21 \times d(7) + 8 \times d(6) = 21 + 24 = 45. \end{aligned}$$

C'est un peu lourd, mais pas particulièrement compliqué une fois la formule mise en place.

Remarque : exercice gradué se terminant par une question difficile.

Commentaires généraux de Pierre Bornsztein

Quatre élèves ont résolu tous les exercices.

Vu la facilité des exercices nationaux, ce sont les académiques qui ont décidé du palmarès.