

TOULOUSE

Exercice n° 1

Énoncé

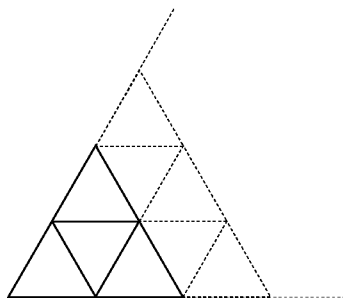
Les rayons de miel

(Candidats toutes séries)

Les cellules formant les rayons de miel des ruches sont en forme d'hexagones réguliers. Les entomologistes ont récemment émis pour expliquer ce phénomène une hypothèse « économique » que nous allons essayer de comprendre. En effet, pourquoi des hexagones plutôt que des carrés ou des triangles ?

1°) Soit un carré de 10 cm de côté recouvert par des petits carrés de 1 cm de côté. Quelle est la surface totale de ces petits carrés ? Quelle est la longueur totale de leurs bords (un côté commun à deux cellules est compté une seule fois) ?

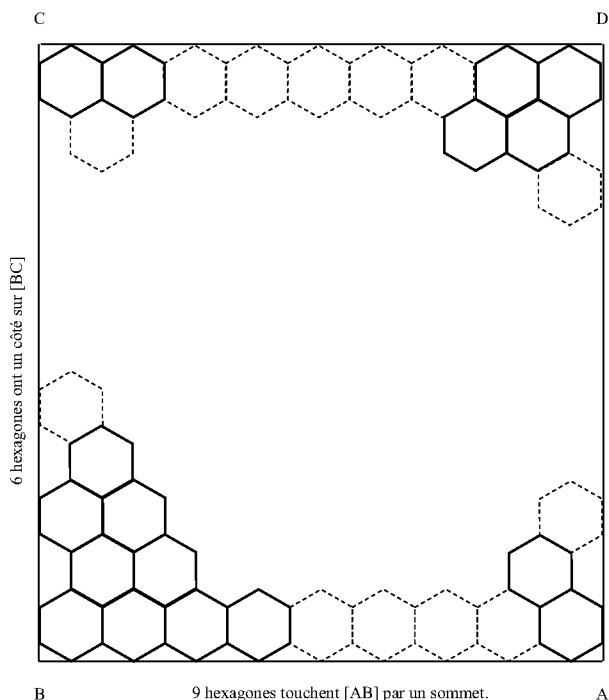
2°) On considère un « grand » triangle équilatéral recouvert par des « petits » triangles équilatéraux de 1 cm^2 d'aire (voir dessin ci-dessous).



On suppose que la longueur d'un côté du « grand » triangle fait 10 fois la longueur du côté d'un « petit ». Combien faut-il de « petits » triangles pour recouvrir le « grand » ? Quelle est la longueur totale des bords des

« petits » triangles (un côté commun à deux cellules est compté une seule fois) ?

3°) On considère des hexagones réguliers d'aire 1 cm^2 disposés à l'intérieur d'un rectangle ABCD, comme ci-dessous, de telle sorte que 9 hexagones aient un sommet sur AB et 6 hexagones aient un côté sur AD. Quel est le nombre total d'hexagones dans le rectangle ABCD ? Quel est la longueur totale des bords de ces hexagones (un côté commun à deux cellules est compté une seule fois) ?



4°) Quel avantage les abeilles trouvent-elles à construire des cellules à cloisons hexagonales plutôt que carrées ou triangulaires, ceci à aires égales pour les cellules de ces trois différentes formes ?

Solution

1) aire : 100 cm^2 ; longueur totale des bords : $2 \times 11 \times 10 = 220 \text{ cm}$;
rapport surface/longueur = $100/220$ environ 0,455

2) $10 + 2 \times 9 + 2 \times 8 + \dots + 2 \times 1 = 100$ petits triangles, donc 100 cm^2

Côté d'un triangle : x tel que $\frac{1}{2}x \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) x = 1$ soit $x = \frac{2}{\sqrt[4]{3}} \approx 1,520$.

Il y a 30 côtés sur les bords du grand triangle ; les autres sont contigus à deux triangles ; le nombre total de côtés est donc N tel que :

$$N = \frac{300 - 30}{2} + 30 = 165.$$

La longueur totale des bords est donc $165x$ soit environ 250,8 cm.
Le rapport surface/longueur $\approx 0,399$ est plus faible que pour les carrés.

3) 6 rangées de 9 plus 5 rangées de 8 « en quinconce » soit 94 hexagones (donc une aire de 94 cm²) la surface de l'hexagone est décomposable en 6 triangles équilatéraux de côtés de longueur égale à celle des côtés de l'hexagone. Le calcul du 2^o donne un côté y tel que $\frac{\sqrt{3}}{4}y^2 = \frac{1}{6}$, soit

$$y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3\sqrt{3}}} \approx 0,620.$$

Sur le bord de la figure, on compte $4 + 2 \times 8 \times 2 + 2 \times (6 + 3 \times 5) = 78$ côtés d'hexagones « solitaires », d'où un nombre total N_1 de côtés :

$$N_1 = \frac{6 \times 94 - 78}{2} + 78 = 321 \text{ côtés.}$$

Les bords ont une longueur totale d'environ 199 cm. Le rapport surface/longueur $\approx 0,475$.

4) On constate que le rapport surface/longueur est plus grand avec celui des cellules hexagonales, ceci pour des cellules de diverses formes ayant la même surface. Il y a donc pour les abeilles moins de « matériel perdu » en utilisant les hexagones.

Exercice n° 2

Enoncé

Concombres et champignons

(Candidats autres que séries S et STI)

1. Un concombre de 300 grammes est cueilli à 98% d'eau. Après transport, à la livraison, il ne contient plus que 97% d'eau.

Quelle est alors sa masse ?

2. D'après vous, qui est de bonne foi dans la saynète de marché aux légumes suivante, et pourquoi ?

« Mes champignons sont très frais, ils sont composés à 99% d'eau, c'est un régal de fraîcheur ! » clame le marchand.

Louise : « Je vous en achète 2 kilos, que vous voudrez bien me livrer demain. »

Le lendemain, à la livraison, Louise : « Dites donc, ils ont perdu au moins la moitié de leur poids, vos champignons ! »

« C'est impossible, Madame, ils contiennent encore 98% d'eau ! » répond le marchand.

Solution

1) Le concombre est composé d'eau et de masse solide. Celle-ci vaut $0,02 \times 300$. Après transport, elle équivaut à 3 % de la masse de concombre. D'où cette masse : 200 g.

2) Pour le marchand : $0,01 \times 2$ kg de masse solide ; pour Louise qui teste un taux de 98 % d'eau : $0,02 \times 1$ kg. Ce qui est égal.

Les deux ont donc raison.

Exercice n° 3

Enoncé

Les skieurs attendent

(Candidats des séries S et STI)

Une file de n skieurs portant des dossards numérotés de 1 à n (n sera appelé « effectif ») attend à un téléski. Ils sont placés dans la file suivant l'ordre de leur dossard. Le perchman fait passer un skieur sur deux, et le suivant va se remettre au bout de la file. Le skieur de dossard 1 passe en premier. Le problème est de déterminer le dossard du skieur qui passe en dernier.

1. Indiquer le dossard du skieur qui passera en dernier, ceci, pour chacun des effectifs donnés dans le tableau ci-dessous (reproduire le tableau sur la copie) :

Effectifs	9	10	11	12	13	14	15	16	17
dernier									

- 2.(a) Quel est le dossard du skieur qui passe en dernier pour un effectif de 27 skieurs ? de 54 skieurs ?

Justifier les réponses.

(b) Exposer une *méthode* permettant de répondre à cette question pour un effectif plus important, par exemple en se ramenant à un effectif plus faible que celui proposé (il n'est demandé ni « formule », ni démonstration.)

3. Le perchman fait maintenant passer 2 skieurs sur 3, en commençant par les dossards 1 et 2, les recalés revenant, comme précédemment, se remettre en bout de file.

Quel est le dossard du skieur qui passe en dernier si l'effectif vaut 3^p , p étant un entier naturel non nul ? Justifier la réponse !

Solution

1°) Indiquer le dossard du skieur qui passera en dernier, ceci pour chacun des effectifs donnés dans le tableau ci-dessous.

Effectif	9	10	11	12	13	14	15	16	17
dernier	2	4	6	8	10	12	14	16	2

2°)a) Pour 27 skieurs dans la file, les dossards impairs montent et la nouvelle file est constituée des dossards pairs ; mais *le 2 ne monte pas puisque le 27 est monté*. C'est donc le n° 4 qui monte le premier au deuxième tour, et le dernier à monter sera le 24. Le 26 ne monte pas , donc dans l'étape suivante le 2 part , etc. Le dernier à monter sera le 22.

Pour 54 skieurs, les impairs partent ; il reste 27 skieurs à dossards pairs, et le 2 monte puisque le 54 n'est pas parti. On se retrouve dans la situation des 27 skieurs, en multipliant les numéros des dossards par 2.

Le dernier à partir sera donc le 44.

2°)b) On peut par exemple utiliser un algorithme (éventuellement récursif) (et fonctionnant très bien si l'on dispose d'une structure de liste) , suivant les principes suivants :

données : la liste des dossards qui sont dans la file, plus un *code* , soit 1 si le premier à partir est le premier de la file et 2 si c'est le second.

On crée alors la liste des « recalés » (1 sur 2) et on calcule le code pour la montée suivante (c'est le même si la file comportait un nombre pair de skieurs, et le code alternatif si ce nombre était impair).

On obtient ainsi une nouvelle liste 2 fois plus courte (au moins) , ainsi que le nouveau code à utiliser.

Le dernier skieur à partir porte le dossard restant lorsque la liste en cours n'a plus qu'un élément.

3°) Dans ce cas les dossards 1, 2, 4, 5...montent et il reste les dossards 3, 6,...soit 3^{p-1} skieurs de dossards multiples de 3 ; au deuxième tour, il restera 3^{p-2} dossards multiples de 9 etc. Le dernier à monter sera ainsi... le dernier, c'est-à-dire le dossard 3^p .

Bilan

Les candidats en 2005 :

285 candidats : 170 garçons, 115 filles. Les candidats se répartissent sur les huit départements : Ariège (13), Aveyron (49), Haute-Garonne (116), Gers (2), Lot (6), Hautes-Pyrénées (2), Tarn (88), Tarn-et-Garonne (9). En cette première année d'ouverture à un plus large éventail d'élèves, la participation d'élèves des séries technologiques ou des élèves de la série Sciences Economiques et Sociales est encore très faible :

série	inscrits	ayant composé
ES	6	5
L	5	3
S	369	271
SMS	8	6
STI	0	0
STL	0	0
STT	0	0
TOTAL	388	285
		115 filles 170 garçons

Les lauréats :

Pour le palmarès de la série scientifique, 29 lauréats sont primés au palmarès académique dans ; ils proviennent de 18 lycées (sur les 114 de l'académie). Ce nombre relativement important d'élèves primés est en relation avec la nature des prix décernés (visites, activités scientifiques).

Les copies des trois premiers sont communiquées à la cellule nationale

pour un éventuel classement national. Une citation au palmarès académique est prononcée au titre des séries non scientifiques.

Les prix, la remise des prix :

La remise de prix académique est présidée par Monsieur le Recteur.

La médaille de l'Académie est décernée par Monsieur le Recteur au lauréat classé premier.

Chacun des lauréats reçoit le diplôme des Olympiades académiques 2005. Comme les années précédentes, divers partenaires ont contribué avec intérêt à la dotation en prix : Région, EADS, ENSAE, Ecole des Mines d'Albi-Carmaux, INSA, Université Paul Sabatier, CNES, CNRS, LAAS, CERFACS, ASTRIUM, Cité de l'Espace, Observatoire Midi-Pyrénées, Science Animation, URISMIP.

Ceci a permis d'attribuer des récompenses d'ordre scientifique :

- Deux voyages à Paris avec accueil à l'Ecole Normale et au Palais de la Découverte
- Un ordinateur muni d'un logiciel mathématique offert par le LAAS
- Accueil à l'ENSAE et vols d'essais
- Accueil à l'ENAC
- Séjour à l'Observatoire du Pic du Midi
- Visites de laboratoires de recherche : CNRS, LAAS, CERFACS
- Entrées à la Cité de l'Espace
- Ouvrages scientifiques ou culturels (Région, Université Paul Sabatier, ASTRIUM, CNES)
- Prix spécifique de la Faculté de Sciences Economiques.

Les lauréats, leurs professeurs, leurs chefs d'établissement sont reçus au Rectorat pour la remise de prix en présence des partenaires.