

STRASBOURG

Le candidat choisit de traiter deux exercices parmi les trois suivants.

Exercice n° 1 (1^{ère} S)

Enoncé

Les jetons

Dans ce jeu, il existe deux types de jetons, les blancs et les noirs. Le joueur dispose au début de la partie d'un jeton . La banque dispose de jetons de chaque couleur en nombre suffisant. A chaque « coup » , le joueur donne un jeton de son choix à la banque et reçoit en retour quatre jetons de l'autre couleur. Une partie se déroule en plusieurs coups.

Le joueur gagne si à l'issue d'un coup il a autant de jetons de chaque couleur.

Est-il possible au joueur de gagner à ce jeu ?

Solution

A un certain stade du jeu, le joueur détient a jetons blancs et b jetons noirs. On suppose $a < b$ et on pose $d = b - a$. Le joueur gagne lorsque $d = 0$.

Au coup suivant, le joueur détiendra a' blancs et b' noirs. Soit d' la différence. On envisage les deux cas :

- Si $a' < b'$ alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} a' = a - 1 \\ b' = b + 4 \end{array} \right. \Rightarrow d' = d + 5. \text{ Ou } \left\{ \begin{array}{l} a' = a + 4 \\ b' = b - 1 \end{array} \right. \Rightarrow d' = d - 5.$$

suivant que le joueur choisisse de donner un jeton blanc ou noir à la banque.

- Si $b' < a'$ alors :

$$\begin{cases} b' = b - 1 \\ a' = a + 4 \end{cases} \Rightarrow d' = 5 - d \quad (d = b - a < 5).$$

On part de $d = 1$ et on constate que la différence ne donne jamais 0.

(On reste avec $d \neq 0 \pmod{5}$ dans tous les cas.)

Exercice n° 2 (1^{ères} ES-L-STT)

Énoncé

Olymplant

A Olymplant, il y a quatre villes A , B , C et D.

Il existe 6 routes directes de A à B, 4 de B à D , 3 de A à D et 2 de D à C.

Combien y-a-t-il d'itinéraires possibles de A à C (sans repasser deux fois par la même ville) ?

Solution

On compte $2 \times 3 + 24 \times 2 = 54$ itinéraires possibles de A à C.

Exercice n° 3 (Toutes 1^{ères})

Énoncé

Retour à la case départ

On part de quatre entiers relatifs non nuls (a, b, c, d) . On les transforme en (a', b', c', d') par l'opération suivante : $a' = a \times b$; $b' = b \times c$; $c' = c \times d$ et $d' = d \times a$.

Par exemple : $(1, -1, 2, -1)$ se transforme en $(-1, -2, -2, -1)$.

On répète cette opération sur (a', b', c', d') et ainsi de suite. On observe qu'à un moment on retrouve les quatre entiers de départ (a, b, c, d) dans le même ordre.

Montrer que $a = b = c = d = 1$.

Solution

On constate que $(abcd)^n = abcd$ pour un certain entier.

Comme les nombres a, b, c et d sont des entiers, on en déduit :

$a = b = c = d = 0$ ou $a = \pm 1$, $b = \pm 1$, $c = \pm 1$, et $d = \pm 1$.

En étudiant les différents cas, on obtient $a = b = c = d = 1$.