

ROUEN

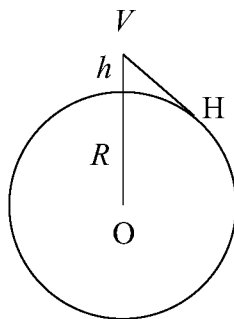
Exercice n° 1 (S et STI)

Énoncé

Le phare

La Terre est assimilée à une sphère de rayon $R = 6400$ km. Dans un port situé au bord d'un vaste océan, on dresse un point d'observation à $h = 40$ mètres du niveau de la mer afin de surveiller l'approche des navires et les appareillages. Un homme situé dans cet observatoire scrute l'horizon.

1. En supposant que le regard puisse se porter aussi loin que possible, à quelle distance se situe l'horizon pour l'homme de la vigie, au kilomètre près ? La ligne d'horizon est définie par l'endroit où la rotondité de la Terre empêche à l'œil de voir la surface de la mer au-delà de ce point. Ceci peut être schématisé ainsi :



2. Un bateau quitte le port à la vitesse constante de 10 nœuds¹ et s'éloigne en ligne droite depuis la vigie vers l'horizon. On considère que le navire disparaît de la vue dès qu'il a atteint la ligne d'horizon. Estimer au centimètre près l'écart entre la portée de vue depuis la vigie et la distance réelle parcourue par le bateau jusqu'à l'horizon.

¹Un nœud est la vitesse mise par un navire pour parcourir un mille marin (1,852 km) en une heure

En combien de temps le bateau aura-t-il passé l'horizon, à la minute près ?

3. A quelle hauteur, au mètre près, doit-on construire un phare pour que la vision puisse se porter au maximum à 40 km ?

Solution

1. Le triangle OHV est rectangle en H car la droite (HV) est tangente au cercle en H. Ainsi $OH^2 + HV^2 = OV^2$.

Appelons d_H la distance cherchée. $OH = R$ et $OV = R + h$ où h est la hauteur où la vigie se situe par rapport au niveau de la mer.

On aboutit à $d_H^2 + R^2 = (R + h)^2$ soit $d_H = \sqrt{h(2R + h)} = \sqrt{h(12\,800 + h)}$ où h et d_H sont exprimées en kilomètres.

Comme $h = 40$ m = 0,04 km, il vient $d_H \approx 23$ km.

2. La distance parcourue par le navire est sensiblement différente de la portée de la vision de la vigie. On calcule l'angle au centre du cercle, qui intercepte l'arc compris entre le port et le point d'horizon. Dans le triangle OHV, $\cos \alpha = \frac{R}{R + h}$. L'arc mesure $R\alpha$ si α est mesuré en radians ou $\frac{2\pi R\alpha}{360}$ si α est mesuré en degrés. $d_{\text{parcourue}} = R \cos^{-1} \frac{R}{R + h}$.

L'écart cherché est $\sqrt{h(2R + h)} - R \cos^{-1} \frac{R}{R + h} \approx 9 \times 10^{-5}$ km, ce qui est négligeable.

Le temps cherché est $t \approx 1,22h \approx 1$ h 13 mn.

3. Dans l'égalité $d_H = \sqrt{h(12\,800 + h)}$, l'inconnue est h et $d_H = 40$.

$$d_H = \sqrt{h(12\,800 + h)}$$

$$\Leftrightarrow 40^2 = 12\,800h + h^2 \text{ (nombres positifs)}$$

$$\Leftrightarrow h^2 + 12\,800h - 1600 = 0; \Delta = 12\,800^2 + 4 \times 1600 = (80\sqrt{25\,601})^2$$

$$\Leftrightarrow h = 40\sqrt{25\,601} - 6\,400 \approx 0,125 \text{ km soit environ 125 mètres.}$$

La hauteur de l'antique phare d'Alexandrie en Egypte est estimée autour de 130 mètres.

Remarque : cet exercice est analogue à l'exercice n° 2 d'Orléans.

Exercice n° 2 (ES, L et STT)

Enoncé

Les trois mendiants

Une dame charitable rencontra un pauvre auquel elle donna la moitié de l'argent qu'elle avait dans son porte-monnaie, plus un euro. Le pauvre, qui était membre de l'association des mendiants unifiés, réussit, en la remerciant, à dessiner à la craie le signe de remerciement de l'association sur ses vêtements. Ce qui permit à la dame de mener à bien son œuvre de charité au cours du reste de sa promenade. Au deuxième mendiant, elle donna la moitié de ce qui lui restait, plus deux euros. Au troisième mendiant, elle donna la moitié de ce qui lui restait, plus trois euros. A présent, il lui reste un seul euro. Combien avait-elle au début de sa promenade ?

Solution

Soit x la somme d'argent en euros qu'elle avait au début de sa promenade.

Le 1^{er} mendiant reçoit : $\frac{x}{2} + 1$ euros.

Il lui reste donc : $x - \left(\frac{x}{2} + 1\right) = \frac{x}{2} - 1$ euros.

Le 2^{ème} mendiant reçoit : $\frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} - 1\right) + 2 = \frac{x}{4} + \frac{3}{2}$ euros.

Il lui reste donc : $\frac{x}{2} - 1 - \left(\frac{x}{4} + \frac{3}{2}\right) = \frac{x}{4} - \frac{5}{2}$ euros.

Le 3^{ème} mendiant reçoit : $\frac{1}{2} \left(\frac{x}{4} - \frac{5}{2}\right) + 3 = \frac{x}{8} + \frac{7}{4}$ euros.

Il lui reste enfin : $\frac{x}{4} - \frac{5}{2} - \left(\frac{x}{8} + \frac{7}{4}\right) = \frac{x}{8} - \frac{17}{4}$ euros.

On obtient l'équation : $\frac{x}{8} - \frac{17}{4} = 1$ d'où $\frac{x}{8} = \frac{21}{4}$ soit $x = 42$.

La dame charitable avait 42 euros au début de sa promenade.

Exercice n° 3 (Toutes séries)

Enoncé

Triangles

Soit ABC un triangle équilatéral. On pose : $AB = BC = CA = x$.

Soit (C) le cercle circonscrit au triangle ABC .

Soit D le point du petit arc AC du cercle (C) tel que : $CD = 2AD$.

On pose $AD = y$.

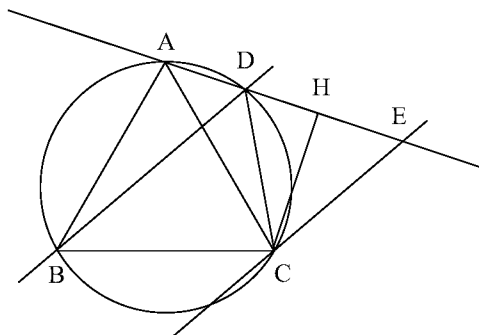
Soit E le point d'intersection de la droite (AD) et de la parallèle à (BD) passant par C .

Soit H le pied de la hauteur issue de C du triangle CDE .

1. Quelle est la nature du triangle CDE ? Justifier.

2. Montrer que $\text{aire}(CDE) = \frac{4}{7} \text{aire}(ABC)$.

Solution



1. Dans le cercle (C) , on a : $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} = 60^\circ$ angles interceptant le même arc AB .

$\widehat{BDC} = \widehat{BAC} = 60^\circ$ angles interceptant le même arc BC .

D'où : $\widehat{CDE} = 180^\circ - (\widehat{ADB} + \widehat{BDC}) = 180^\circ - (60^\circ + 60^\circ) = 60^\circ$.

Comme (BD) et (CE) sont parallèles, les angles $\widehat{ADB}$ et $\widehat{DEC}$ sont correspondants, donc égaux. D'où : $\widehat{DEC} = \widehat{ADB} = 60^\circ$.

Le triangle CDE est équilatéral car c'est un triangle qui a 2 angles de 60° .

2. H étant le pied de la hauteur issue de C du triangle équilatéral, est aussi le milieu de $[DE]$. D'où : $DH = \frac{DE}{2} = \frac{CD}{2} = \frac{2y}{2} = y$.

On en déduit : $AH = AD + DH = y + y = 2y$. $[CH]$ étant la hauteur

du triangle équilatéral CDE de côté $2y$, on en déduit : $CH = \frac{2y\sqrt{3}}{2}$ soit $CH = y\sqrt{3}$.

Le théorème de Pythagore dans le triangle AHC rectangle en H donne :

$$AH^2 + CH^2 = AC^2$$

$$\text{soit } (2y)^2 + (y\sqrt{3})^2 = x^2$$

$$\text{soit } 7y^2 = x^2 \text{ ou } x^2 = 7y^2.$$

$$\text{D'où } \frac{\text{aire}(\text{CDE})}{\text{aire}(\text{ABC})} = \frac{\frac{y^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{x^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{y^2}{x^2} \times 4 = \frac{4}{7}.$$

Solution approche Cabri

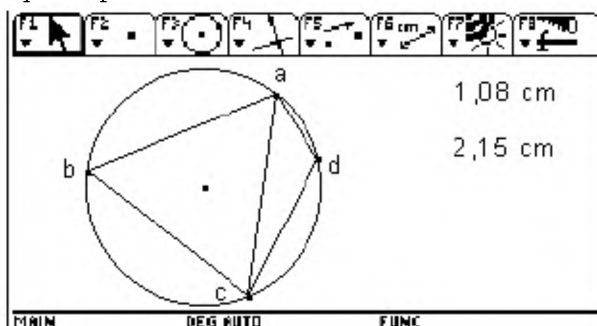
par A. Guillemot Approche Cabri.

(Pour une meilleure lisibilité de la figure les noms des points sont en minuscule).

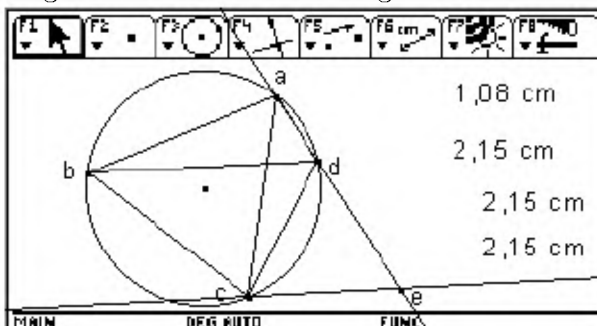
Construisons un triangle ABC et son cercle circonscrit.

Plaçons un point D sur le petit arc AC et demandons les longueurs AD et CD .

Déplaçons D pour que l'on ait $BC = 2AD$.



Terminons la figure en demandant les longueurs de DE et CE .



Le triangle semble être équilatéral.

Démonstration.

1) $\widehat{CDE} = \widehat{ADM}$ comme angles opposés par le sommet, donc $\widehat{CDE} = 60^\circ$

$\widehat{BDC} = \widehat{DAC}$ comme angles interceptant le même arc.

$\widehat{BDC} = \widehat{DCE}$ comme angles alternes internes, donc $\widehat{CDE} = 60^\circ$

DCE a deux angles de 60° , donc c'est un triangle équilatéral.

Construction exacte de la figure.(qui aurait pû être une jolie question).

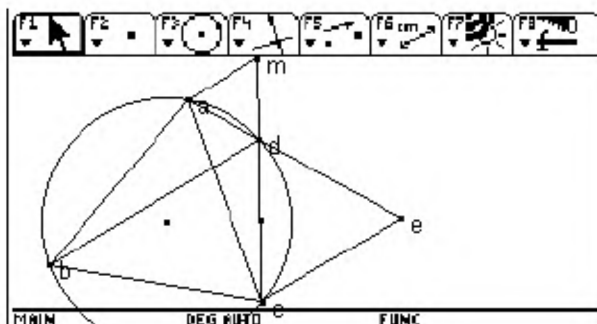
Comme D est sur le petit arc AC, l'angle $\widehat{ADC}$ vaut 120° .

On construit d'abord un triangle équilatéral ADM.

On place sur (MD) le point C tel que $DC = 2MD$.

On construit le triangle équilatéral ACB et son cercle circonscrit.

On termine en plaçant le point E.



Autre méthode (idée de F. et M. Villiaumey).

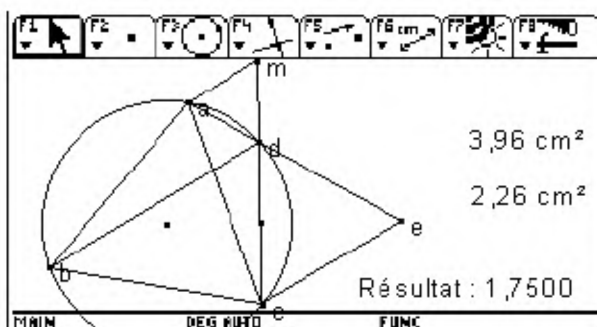
D est tel quel $\frac{DC}{DA} = 2$. Donc D est un élément de l'ensemble des points

M du plan tels que $\frac{MC}{MA} = 2$, à savoir le cercle de diamètre [HK] où H

est le barycentre de $(A(2); C(1))$ et K le barycentre de $((A,-2); C(1))$.

On place donc H au tiers de [AC] à partir de A et K le symétrique de C par rapport à A. Le point D est à l'intersection de ce cercle et du cercle circonscrit.

2) On demande l'aire de ABC et de CDE et on fait le rapport grâce à la commande « calculatrice ».



$\frac{7}{4} = 1,75$. Le résultat est conforme aux indications de l'énoncé.

Dans le triangle ADC, $AD = y$, $DC = 2y$ et $\widehat{ADC} = 120^\circ$. Il en résulte que :

$$\begin{aligned} AC^2 &= AD^2 + DC^2 - 2AD.DC.\cos(\widehat{ADC}) \\ &= y^2 + (2y)^2 - 2y \times 2y \times (-1/2) = 7y^2. \end{aligned}$$

$$DC^2 = 4y^2$$

Comme le rapport des aires de deux triangles équilatéraux est égal au rapport des carrés des côtés, on a bien : $\text{Aire}(CDE) = \frac{4}{7} \text{Aire}(ABC)$.