

RENNES

Le candidat choisit de traiter deux exercices parmi les trois suivants.

Exercice n° 1

Enoncé

Nicolas, Jacques et la mouche...

Nicolas et Jacques sautillent allègrement le long d'un chemin qui comporte des bornes numériques. Le petit Nicolas démarre à la borne 0 et saute les bornes deux par deux (0, 2, 4, etc.) tandis que Jacques qui a de plus grandes jambes, parti de la borne 953, les passe dans le même temps 5 par 5 (953, 948, 943, etc.).

- 1- Peuvent- t-ils se rencontrer sur une même borne ?
- 2- Sinon quelles sont les deux bornes sur lesquelles ils se trouveront nez à nez ?

Une mouche très curieuse et très rapide fait un aller-retour entre Nicolas et Jacques dans le court laps de temps qui sépare le moment où ils arrivent sur les bornes et le moment où ils en repartent.

- 3- Sachant que l'intervalle entre deux bornes est de 25 cm et que la mouche termine son périple en se posant sur Nicolas lorsqu'il arrive sur sa dernière borne quelle distance a-t-elle parcouru ?

Solution proposée par la cellule académique

Au n -ième saut Nicolas se trouve sur la borne $2n$ et Jacques sur la borne $953 - 5n$.

- 1- Pour qu'ils se rencontrent sur une même borne il faut trouver n tel que : $953 - 5n = 2n$, soit $7n = 953$ ce qui est **impossible**.

- 2- La division euclidienne de 953 par 7 donne un quotient égal à 136 et un reste égale à 1. Pour $n = 136$ Nicolas arrive sur la borne 272 et Jacques

sur la borne 273 et bien évidemment pour $n = 137$ ils sont passés respectivement à 274 et 268. **La solution est donc celle qui correspond à 272 et 273.**

3 - Enfin en supposant que la mouche part de Nicolas arrivé sur sa première borne, celle portant le numéro 2 pour aller sur Jacques sur la 948 puis retour vers Jacques, et ainsi de suite chaque trajet comprend 2 fois la distance NJN + la distance NN', N' étant la position suivante de N, constante et égale à 50 cm d'où :

$$D = 25 \left(2 \sum_{1}^{136} [(953 - 5n) - (2n)] \right) \\ = 25 \left(2 \times 136 \times 953 - 7 \sum_{1}^{136} n \right) = 25(259216 - 65212)$$

La pauvre mouche a parcouru 48,501 Km.

Solution (à l'aide d'une calculatrice)

Proposée par A. Guillemot

1) et 2)

Au départ Nicolas et Jacques sont sur les bornes 0 et 953

Après un saut, ils sont sur les bornes 2 et 948, après 2 sauts, ils sont sur les bornes 4 et 943. Continuons ainsi à la calculatrice en utilisant la commande **Ans**, en appuyant plusieurs fois sur la touche **ENTER** on va voir les différentes bornes atteintes par les deux garçons.

(0,0,953)	(132 264 293)
(0 0 953)	(133 266 288)
(Ans(1)+1,Ans(2)	(134 268 283)
+2,Ans(3)-5)	(135 270 278)
(1 2 948)	(136 272 273)
(2 4 943)	(137 274 268)
(3 6 938)	(138 276 263)

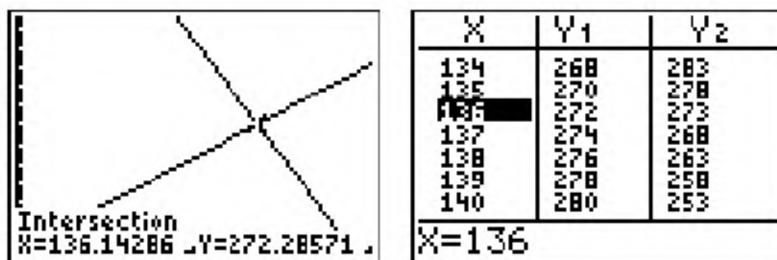
Après 136 sauts, Nicolas se retrouve sur la borne 272 et Jacques sur la borne 273. Il ne peuvent donc pas se rencontrer sur la même borne.

Utilisation des fonctions- graphique et table- (Idée de France et Michel Villiaumey).

Utilisons les fonctions $Y_1 = 2X$ et $Y_2 = 953 - 5X$ et représentons-les dans une même fenêtre avec $0 < X < 200$ et $0 < Y < 500$

En utilisant la commande intersect du menu **CALC**, on obtient les coordonnées du point d'intersection des deux courbes.

Il suffit d'afficher la table des valeurs (**TABLE**) pour des valeurs de X proches de 136.



Donc après 136 sauts, Nicolas se retrouve sur la borne 272 et Jacques sur la borne 273. Il ne peuvent pas se rencontrer sur la même borne.

3) Cette question a plusieurs interprétations possibles, en voici une.

La mouche fait un aller-retour après chaque saut de Nicolas et de Jacques et elle s'arrête avant qu'ils se croisent.

Après le saut 1 Nicolas est sur la borne 2 et Jacques sur la borne 948, un aller-retour entre ces deux bornes va permettre de parcourir :

$$2 \times (948 - 2) \times 0,25 = 473 \text{ m.}$$

Après le saut 2 Nicolas est sur la borne 4 et Jacques sur la borne 943, un aller-retour entre ces deux bornes va permettre de parcourir :

$$2 \times (943 - 4) \times 0,25 = 469,5 \text{ m.}$$

Après le saut 3 Nicolas est sur la borne 6 et Jacques sur la borne 938, un aller-retour entre ces deux bornes va permettre de parcourir :

$$2 \times (938 - 6) \times 0,25 = 466 \text{ m.}$$

Après le saut 135 Nicolas est sur la borne 270 et Jacques sur la borne 278, un aller-retour entre ces deux bornes va permettre de parcourir :

$$2 \times (278 - 270) \times 0,25 = 4 \text{ m.}$$

Après le dernier saut Nicolas est sur la borne 272 et Jacques sur la borne 273, un aller-retour entre ces deux bornes va permettre de parcourir : 0,5m.

Il suffit d'additionner toutes ces distances en remarquant qu'il y a 136 nombres qui vont de 3,5 en 3,5 en partant de 473 pour arriver à 0,5.

On utilise pour cela la commande : $\text{sum}(\text{seq}(473 - 3.5I, I, 0, 135))$ qui nous donne 32198.

Donc la mouche a parcouru en volant 32198 mètres.

Si on ajoute que pendant les sauts elle était posée sur Nicolas et se déplaçait avec lui, elle a donc parcouru $(272 - 2) \times 0,25 = 67,5$ mètres portée par Nicolas.

Exercice n° 2

Enoncé

La fête au village

C'est la fête du village à Sainte Olympe!!! Le matin, c'est le marché traditionnel.

Il est 9 heures et l'horloge de l'église vient de sonner les 9 coups en 9 secondes.

Sur un étal, on propose des tomates. Elles proviennent d'un stock de 500 kg oublié pendant deux jours dans un hangar dont la température est de 28°C . Elles ont un peu souffert mais restent bien présentables bien que leur teneur en eau qui est habituellement de 95 % n'est plus que de 90 %.

A 11 heures, l'horloge de l'église sonne et la course cycliste va commencer : les 12 participants répartis en trois équipes prennent le départ.

Au bout de 35 mn, Mikaël Olympe, qui est un des favoris, réussit à doubler son cousin Gwendal qui était jusqu'alors le deuxième. A l'arrivée le classement n'a pas changé. Un généreux donateur britannique, Sir Ing a sponsorisé la course et a offert en plus des premiers prix une somme de 12 000 euros pour récompenser la participation des équipes.

Quelle injustice!!... Les dossards bleus reçoivent 2 000 euros chacun, les dossards rouges 500 et les jaunes 250.

Questions

- 1) Quel poids de tomates le maraîcher propose-t-il à la vente ?
- 2) En combien de secondes sonnent les 11 coups de 11 heures ?
- 3) A quelle place arrive Mikaël ?
- 4) Combien y a-t-il de dossards de chaque couleur ?

Solution proposée par la cellule académique

1) On note $P = 500$ et E le poids total et le poids d'eau au début et P' et E' le poids et le poids d'eau après le séjour dans le hangar.

On a $500 - P' = E - E'$

$$0,9P' = E'$$

$$E = 0,95 \times 500$$

d'où $500 - P' = 0,95 \times 500 - 0,9P'$

$$0,1P' = 500 - 475$$

$$P' = 250 \text{ kg}$$

Réponse : 250 kg

2) 9 secondes pour 9 coups cela veut dire $\frac{9}{8}$ s pour chaque intervalle entre 2 coups.

Pour 11 h il y a 10 intervalles donc $10 \times \frac{9}{8} = 11,25$

Réponse : 11,25 secondes

3) Mikaël double le second donc il sera second

Réponse : second.

4) Si b, r et j sont les nombres de dossards correspondant à chaque couleur, on a

$$b + r + j = 12$$

$$2000b + 500r + 250j = 12\,000$$

ou encore $2b + \frac{r}{2} + \frac{j}{4} = 12$

donc par soustraction : $\frac{3}{2}r + \frac{7}{4}j = 12$ et on obtient : $r = 8 - \frac{7}{6}j$ comme r et j sont des entiers non nuls inférieurs à 12 il faut $j = 6, r = 1$ et $b = 5$.

Réponse : 5 dossards bleus, 1 rouge et 6 jaunes

Exercice n° 3

Enoncé

Inversion

Dans un plan on considère un point noté S et à chaque point M du plan on fait correspondre le point M' tel que $\overrightarrow{SM'} = \frac{-2}{SM^2} \cdot \overrightarrow{SM}$. Cette transformation notée $\mathcal{I}$ est appelée inversion d'origine S et de rapport -2 .

1) On se donne trois points M_1 , M_2 et M_3 et on note m_1 , m_2 et m_3 leurs images par $\mathcal{I}$.

Démontrer que les triangles SM_1M_2 et Sm_1m_2 sont de même forme.

2) On considère une droite d et un point S non situé sur d .

a) Placer les images par $\mathcal{I}$ d'un nombre suffisant de points de d , dont celui du projeté orthogonal P de S sur d puis émettre une conjecture concernant la transformée par $\mathcal{I}$ de la droite d .

b) En considérant P et P' son image par $\mathcal{I}$ ainsi qu'un point M quelconque de d et son image M' , démontrer votre conjecture.

3) On considère maintenant un cercle $\mathcal{C}$ passant par S . Emettre une conjecture sur l'image de $\mathcal{C}$ par $\mathcal{I}$ puis démontrer votre conjecture.

4) Construire l'image par $\mathcal{I}$ d'un triangle ABC situé d'une manière quelconque par rapport à S .

Solution

Question 1

Démonstration

En reprenant la définition on obtient par un calcul simple que $\frac{Sm_1}{SM_2} = \frac{Sm_2}{SM_1}$.

D'autre part les angles $\widehat{M_1SM_2}$ et $\widehat{m_1Sm_2}$ sont égaux car opposés par le sommet, les triangles SM_1M_2 et Sm_1m_2 sont de même forme.

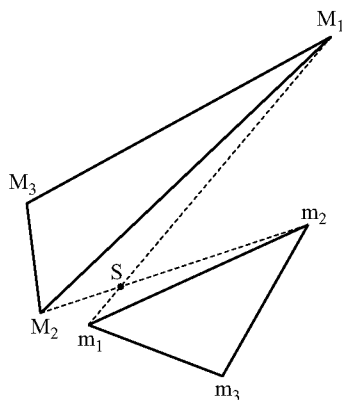


Figure 1

Question 2

a) Voir figure 2

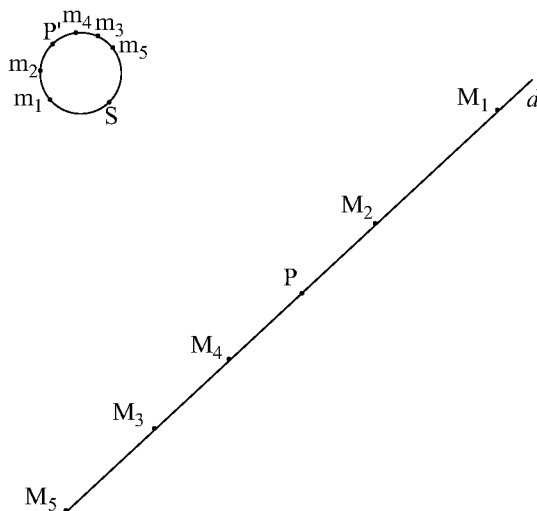


Figure 2

Conjecture : l'image par I de la droite d est le cercle de diamètre SP' .

b) Démonstration Soit M un point de cette droite et m son image, alors les triangles SMP et $S P'm$ sont, d'après la question 1, de même forme, l'angle $\widehat{SmP'}$ est un angle droit, le point m est par conséquent sur le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre SP' .

Ceci montre que l'image de la droite d est contenue dans ce cercle.

Réciproquement soit m un point de ce cercle et considérons le point M obtenu comme intersection des droites (Sm) et d . Montrons que M est l'antécédent de m par $\mathcal{I}$. Or il suffit de raisonner sur les longueurs, puisque par construction les vecteurs $\overrightarrow{Sm}$ et $\overrightarrow{SM}$ sont colinéaires et de sens opposé, et de montrer que $Sm = \frac{2}{SM}$. Les triangles SmP' et SPM sont de même forme (trois angles égaux) les relation de proportionnalité conduisent à la relation $SM.Sm = SP.SP' = 2$ d'où le résultat : tout point du cercle est bien l'image d'un point de la droite.

Question 3

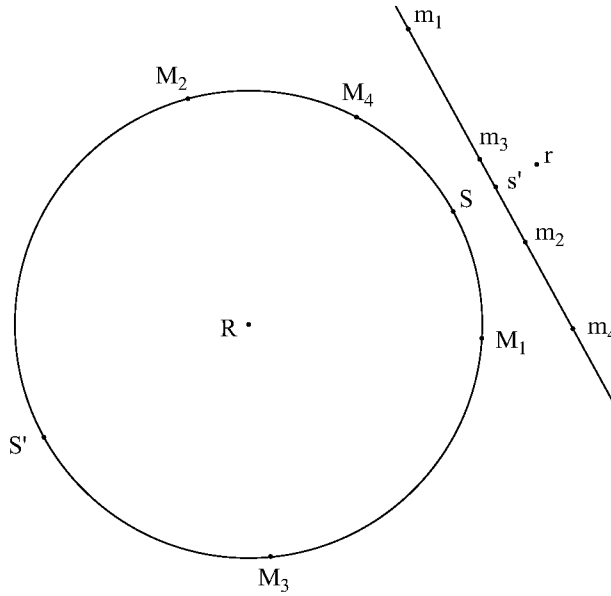


Figure 3

Conjecture : L'image du cercle passant par S est une droite

Démonstration : Soient S' le point diamétralement opposés à S et s' son image Avec les même arguments (direct et réciproque) que dans la question précédente on montre facilement que la droite passant par s' et perpendiculaire à (SS') est l'image du cercle.

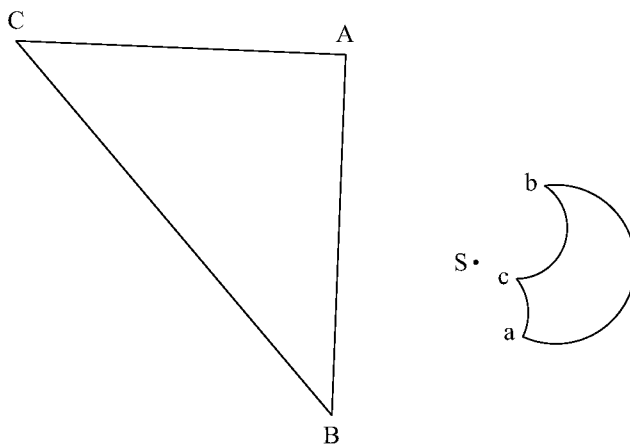
Question 4

Figure 4

Construction- Démonstration :

Chaque côté du triangle est un segment de droite, il va donc être transformé en un arc de cercle dont les extrémités sont les transformés des extrémités du segment. On va donc obtenir trois arcs de cercles dont les extrémités sont communes deux à deux. L'arc à retenir est repéré par le projeté orthogonal de S sur la droite et de son transformé. Si le projeté de S est sur le côté, son transformé appartient à l'arc de cercle image, s'il est à l'extérieur du côté, il est sur l'arc à ne pas retenir.

Solution approche Cabri

proposée par A. Guillemot

Une approche « Cabri » à l'aide d'une calculatrice adaptée (V200 ou TI83) va nous faciliter la tâche.

Pour construire l'image de M par la transformation $\mathcal{I}$ on se sert de l'homothétie.

Pour un point M donné, son image M' sera l'image de M dans l'homothétie de centre S et de rapport $-2/SM^2$.

Algorithme de construction.

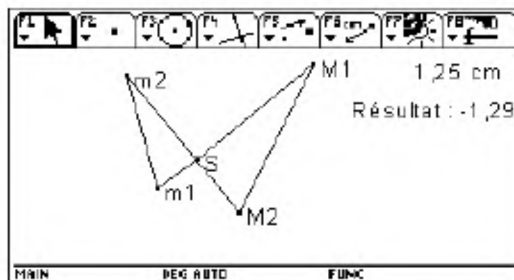
On place le point S .

On prend un point M quelconque et on demande la distance SM .

A l'aide de la calculatrice « Cabri » on calcule le rapport $k = -2/SM^2$

Ensuite on utilise la commande « Homothétie » pour avoir le point image de M par $\mathcal{I}$.

1) On prend deux points et leurs images.



La relation de définition de $\mathcal{I}$ entraîne que $SM' \times SM = 2$ donc $SM_1 \times Sm_1 = SM_2 \times Sm_2$

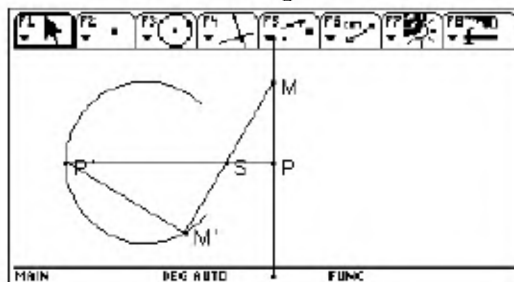
Il en résulte que : $\frac{SM_1}{SM_2} = \frac{Sm_2}{Sm_1}$.

D'autre part les angles $\widehat{M_1SM_2}$ et $\widehat{m_1Sm_2}$ sont égaux car opposés par le sommet.

On a donc les triangles SM_1M_2 et Sm_1m_2 qui sont semblables (ou de même forme).

2) A partir de la figure précédente, on trace une droite d ne passant pas par S et on redéfinit le point M en demandant qu'il soit sur d par la commande « Redéfinir un objet ».

a) En faisant varier M on obtient la figure suivante :



Il semble donc que l'image de la droite soit une partie du cercle de diamètre $[SP']$.

b) Démonstration.

Soit M un point de d et M' son image, d'après la première question $\widehat{SPM}$ et $\widehat{SP'M'}$ sont semblables. Comme l'angle $\widehat{SPM}$ est droit, l'angle $\widehat{SP'M'}$ est aussi droit. Il en résulte que M' est sur le cercle de diamètre $[SP']$.

Réciproquement,

soit M' un point du cercle de diamètre $[SP']$ différent de S. La droite

(M'S) coupe d en M.

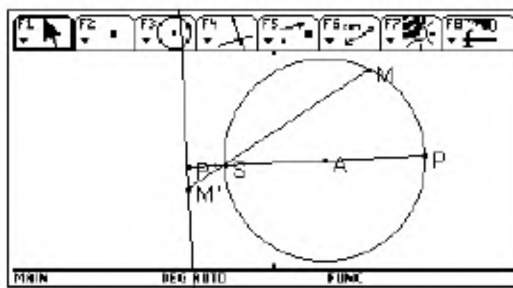
Les triangles SPM et SM'P' sont rectangles et ont un angle aigu égal, donc ils sont semblables.

Il en résulte que $SM \times SM' = SP \times SP' = 2$.

Par construction les vecteurs $\overrightarrow{SM}$ et $\overrightarrow{SM'}$ sont colinéaires et de sens opposés, on a bien M' image de M par $\mathcal{I}$.

Conclusion : L'image de d par $\mathcal{I}$ est le cercle de diamètre [SP'] privé de S.

3) On trace un cercle $\mathcal{C}$ passant par S et on redéfinit le point M comme précédemment en lui demandant d'être sur $\mathcal{C}$.



Conjecture : L'image du cercle privé de S est une droite. S n'a pas d'image.

Démonstration.

On appelle P le point diamétralement opposé à S, P' son image. Soit un point M de $\mathcal{C}$ distinct de S.

Les triangles SMP et SM'P' sont semblables donc l'angle $\widehat{SP'M'}$ est droit. Il en résulte que M' appartient à la perpendiculaire d à (SA) en P'.

Réciproquement.

Soit M' un point de d , la droite (SP') recoupe le cercle $\mathcal{C}$ en M.

Les triangles SPM et SM'P' sont rectangles et ont un angle aigu égal, donc ils sont semblables. Il en résulte que $SM \times SM' = SP \times SP' = 2$.

Par construction les vecteurs $\overrightarrow{SM}$ et $\overrightarrow{SM'}$ sont colinéaires et de sens opposés, on a bien M' image de M par $\mathcal{I}$.

Donc M' est bien l'image d'un point M de d par $\mathcal{I}$.

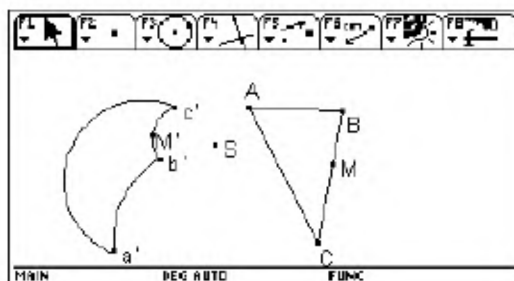
Conclusion :

L'image de $\mathcal{C}$ privé de S par $\mathcal{I}$ est la droite perpendiculaire à (SP) passant par P'. S n'a pas d'image.

4) Remarquons que l'image d'une droite passant par S privée du point S est globalement invariante.

L'utilisation de Cabri nous permet de voir que nous avons quatre cas distincts.

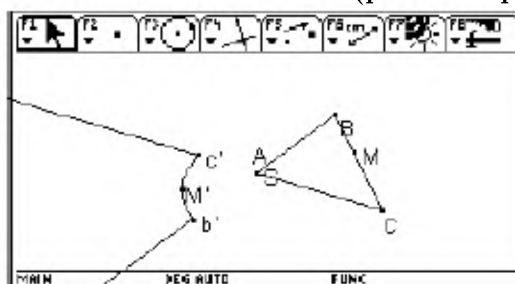
Premier cas : S n'appartient pas aux droites support des côtés du triangle ABC .



L'image est constituée de trois arcs de cercle.

Pour obtenir l'image de $[AB]$, il suffit de prendre les images a' et b' de A et de B , construire le cercle circonscrit à $Sa'b'$ et garder l'arc de cercle limité par a' et b' ne contenant pas S .

Deuxième cas : S est en un sommet. (par exemple A).



L'image est constituée d'un arc de cercle image de $[BC]$ et de deux demi-droites.

