

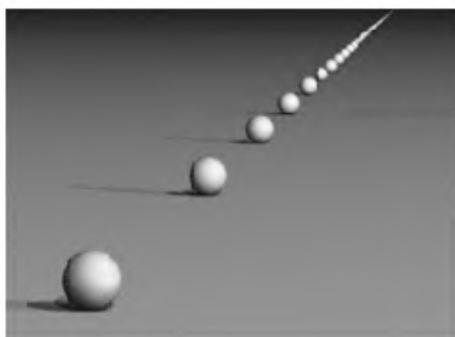
REIMS

Exercice n° 1

Énoncé

Des boules et du billard

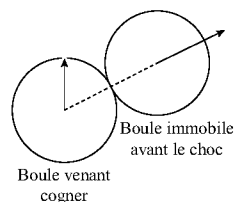
Jeremy aime le billard et les mathématiques. Aussi il imagine une infinité de boules placées régulièrement le long d'une droite sur un billard sans frottement (voir photo).



Théoriquement, taper la première boule dans la direction de cette droite, fera se cogner l'une après l'autre toutes les boules.

Mais qu'en est-il si ce premier coup ne se fait pas exactement dans l'axe des boules ?

Note : Au moment du choc la boule venant cogner imprime à la boule immobile un mouvement de direction égale à celle de la droite passant par les centres des deux boules.



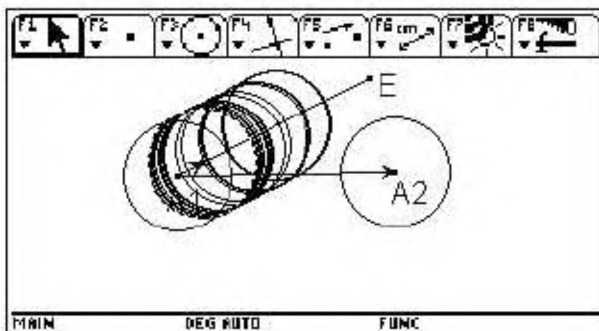
Note : Si le premier coup n'est pas parfaitement dans l'axe, il n'y aura donc toujours qu'un nombre fini de boules qui seront frappées. La progression géométrique montre même que frapper de nombreuses boules est une gageure. En effet, un coup d'une précision par exemple 10 fois supérieure n'amènera qu'à frapper un nombre constant de boules supplémentaires (par exemple 3 boules de plus). Devant une telle amplification d'une erreur nous ne sommes pas loin d'un système chaotique.

Solution approche Cabri

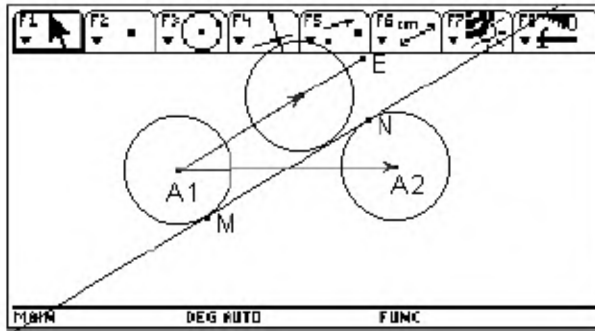
On dira que les boules sont de rayon 1 et que les centres sont séparés d'une distance d . On travaille dans un plan horizontal passant par les centres.

Deux questions préliminaires peuvent se poser.

- 1) Quel est l'angle maximal que peut faire la trajectoire d'une boule avec l'axe pour pouvoir rencontrer la suivante ?
 - 2) Comment tracer simplement les trajectoires des boules avant le choc avec la suivante ?
- 1) Soient deux boules de centres A_1 et A_2 , la première boule se déplaçant suivant la direction (A_1E) ne rencontre la deuxième que si l'angle α que fait (A_1E) avec (A_1A_2) n'est pas trop grand.



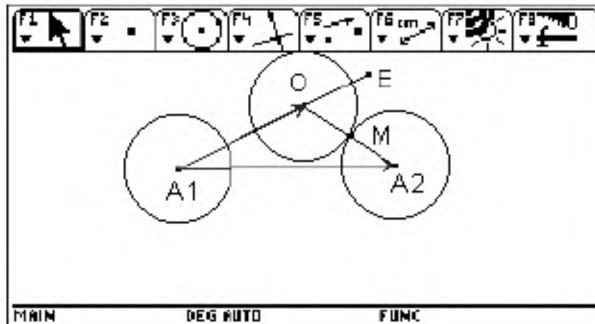
La position limite sera quand la droite (AE) sera parallèle à la tangente commune (MN) .



Appelons I le milieu de $[A_1A_2]$, Le triangle INA_2 est rectangle en N , donc le sinus de l'angle α vaut $2/d$.

Par exemple, si $d = 4$, l'angle maximum que peut faire la trajectoire de la première boule avec l'axe sera de 30° .

3) Comment construire les trajectoires des boules ?



Lorsque la boule 1 rencontre la boule 2, le point de contact M est aligné avec O et A_2 donc la distance $OA_2 = 2$.

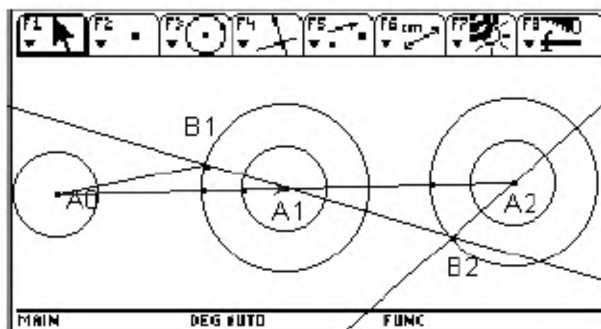
La deuxième boule commencera par se déplacer suivant la direction (OA_2) .

Le point O est donc le premier point d'intersection de (A_1E) (à partir de A_1) avec le cercle de centre A_2 et de rayon 2. Nous avons là le moyen de déterminer la trajectoire de la deuxième boule une fois touchée par la première.

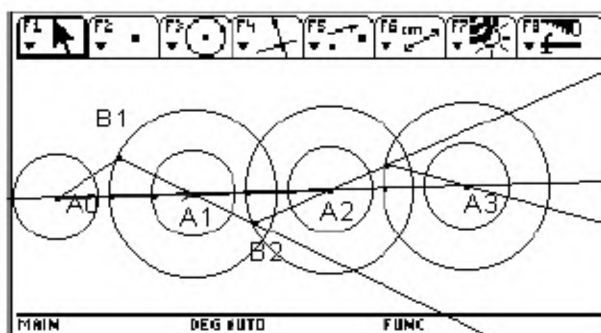
Appliquons ce résultat à plusieurs boules de centre $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots$ et regardons ce qui se passe.

$(A_0B_1), (B_1A_1), (B_2A_2)$ sont les directions de déplacement des trois premières boules. Si la distance entre les boules est suffisamment grande (par exemple $d = 5$), l'angle des directions avec l'axe augmente et au

bout d'un certain nombre de boules, l'angle α sera dépassé et les boules suivantes ne seront plus touchées.



Si la distance entre les boules est plus petite (par exemple $d = 3$), l'angle des directions avec l'axe diminue et il semble que toutes les boules soient touchées.

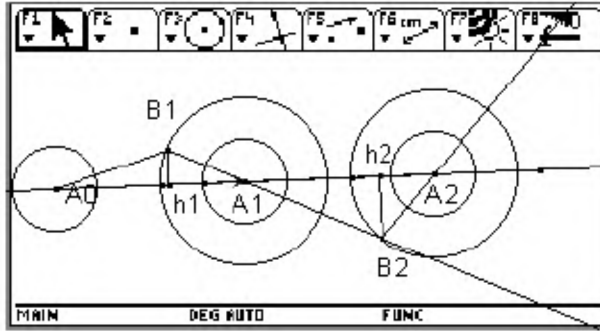


Démonstration.

1^{er} cas $d \geq 4$

Appelons A_0, A_1 et A_2 les centres des trois premières boules, B_1 et B_2 les centres des deux premières au moment du choc avec la suivante, h_1 et h_2 leurs projections sur l'axe. Appelons α_0, α_1 et α_2 les angles des trajectoires des trois premières boules avec l'axe.

Choisissons $d = 5$ (dans ce cas on a $\tan \alpha = 0,436$.)



$$\tan \alpha_0 = \frac{B_1 h_1}{A_0 h_1} \text{ et } \tan \alpha_1 = \frac{B_1 h_1}{A_1 h_1}$$

Comme $A_0 h_1 > 3$ et $A_1 h_1 < 2$ il en résulte que $\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_0} > \frac{3}{2}$.

$$\tan \alpha_1 = \frac{B_1 h_1}{A_1 h_1} = \frac{B_2 h_2}{A_1 h_2} \text{ et } \tan \alpha_2 = \frac{B_2 h_2}{A_2 h_2}.$$

Comme $A_1 h_2 > 3$ et $A_2 h_2 < 2$ il en résulte que $\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} > \frac{3}{2}$.

Donc $\tan \alpha_2 > (3/2)^2 \times \tan \alpha_1$.

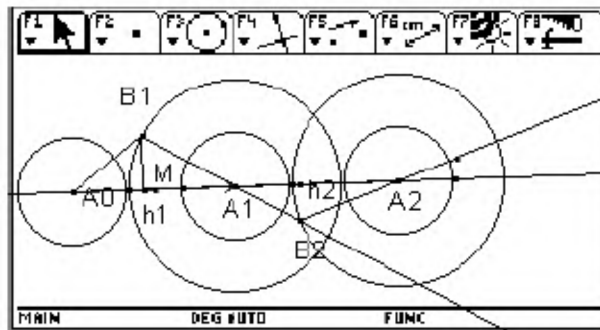
De proche en proche on obtient $\tan \alpha_n > (3/2)^n \times \tan \alpha_0$.

Au bout d'un nombre fini n on aura $\tan \alpha_n > 0,436\dots$ dès que l'angle α_0 n'est pas nul.

Pour $d \geq 4$ $\tan \alpha_0 = \frac{B_1 h_1}{A_0 h_1} = q > 1$ et on sera dans la même situation.

2^{ème} cas : $2 < d < 4$

Appelons M le milieu de $[A_0 A_1]$



Si h_1 est compris entre A_1 et M, on a $A_0 h_1 > h_1 A_1$.

On se retrouve dans le cas précédent et il n'y a qu'un nombre fini de boules qui seront frappées.

Si h_1 est compris entre A_0 et M , on a $A_0h_1 < h_1A_1$.

il en résulte que $\tan \alpha_1 < \tan \alpha_0$, $\tan \alpha_2 < \tan \alpha_1 \dots$ donc que la suite des (α_n) est décroissante, toutes les boules vont être frappées.

Si h_1 est en M , on a $A_0h_1 = h_1A_1$

il en résulte que $\tan \alpha_1 = \tan \alpha_0$, $\tan \alpha_2 = \tan \alpha_1 \dots$ donc que la suite des (α_n) est constante, toutes les boules vont être frappées.

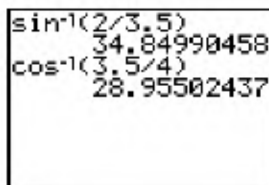
Étude de quelques cas particuliers.

L'angle $\widehat{B_1A_0A_1} = \alpha_0$ doit être inférieur à α caractérisé par $\sin \alpha = 2/d$

Pour que h_1 soit en M , il faut que l'angle $\widehat{B_1A_1A_0} = \alpha_1 = \alpha_0$ ait pour cosinus $d/4$.

Si $d = 3, 5$

$\alpha = 34,8^\circ$ et $\alpha_1 = 29^\circ$



```

sin-1(2/3,5)
34.84990458
cos-1(3,5/4)
28.95502437
  
```

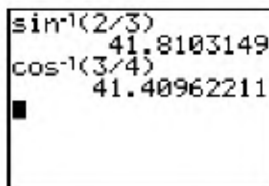
Donc pour un angle $\alpha_0 \leq 29^\circ$ toutes les boules sont déplacées.

Pour un angle α_0 compris entre 29° et $34,8^\circ$ on ne déplace qu'un nombre fini de boules.

Pour un angle α_0 supérieur à $34,8^\circ$ aucune boule n'est déplacée.

Si $d = 3$

$\alpha = 41,8^\circ$ et $\alpha_1 = 41,4^\circ$



```

sin-1(2/3)
41.8103149
cos-1(3/4)
41.40962211
  
```

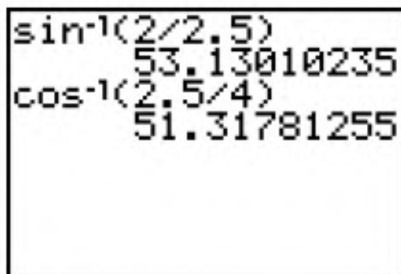
Donc pour un angle α_0 inférieur ou égal à $41,4^\circ$ toutes les boules sont déplacées.

Pour un angle α_0 compris entre $41,4^\circ$ et $41,8^\circ$ on ne déplace qu'un nombre fini de boules.

Pour un angle α_0 supérieur à $41,8^\circ$ aucune boule n'est déplacée.

Si $d = 2,5$

$\alpha = 53,1^\circ$ et $\alpha_1 = 51,3^\circ$.



$$\begin{array}{l} \sin^{-1}(2/2.5) \\ 53.13010235 \\ \cos^{-1}(2.5/4) \\ 51.31781255 \end{array}$$

Donc pour un angle α_0 inférieur ou égal à $51,3^\circ$ toutes les boules sont déplacées.

Pour un angle α_0 compris entre $51,3^\circ$ et $53,1^\circ$ on ne déplace qu'un nombre fini de boules.

Pour un angle α_0 supérieur à $53,1^\circ$ aucune boule n'est déplacée.

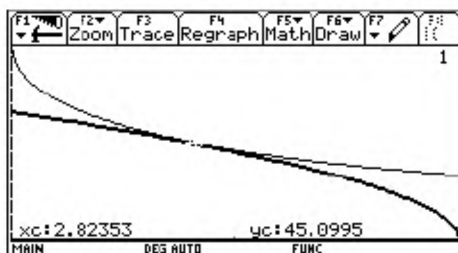
Si $d = 2\sqrt{2}$

$\alpha = 45^\circ$ et $\alpha_1 = 45^\circ$. Donc pour un angle α_0 inférieur ou égal à 45° toutes les boules sont déplacées.

Pour un angle α_0 supérieur à 45° aucune boule n'est déplacée.

Pas de cas intermédiaire.

Représentons sur un même graphique, pour d compris entre 2 et 4 les fonctions $y_1 = \sin^{-1}(2/x)$ et $y_2 = \cos^{-1}(x/4)$ (y_2 est en gras)



On remarque qu'au voisinage de $d = 2\sqrt{2}$, il est difficile d'avoir le cas intermédiaire.

Conclusion.

Si d supérieur ou égal à 4, on ne peut espérer déplacer qu'un nombre fini de boules.

Si $2 < d < 4$ et d différent de $2\sqrt{2}$ on peut déplacer toutes les boules ou un nombre fini selon l'angle d'attaque de la première.

Si $d = 2\sqrt{2}$, toutes les boules sont déplacées ou aucune n'est déplacée.

Exercice n° 2

Enoncé

En partant du volume des cubes

1. Peut-on trouver deux entiers a et b tels que le volume du cube de côté a soit le double de celui du cube de côté b ?

Plus généralement, montrer que la seule solution de l'équation :

$$a^3 + 2b^3 + 4c^3 = 0$$

avec a, b, c entiers relatifs est $a = b = c = 0$.

2. Trouver un ensemble infini d'entiers p tels que la seule solution en nombres entiers a, b , et c de l'équation :

$$a^3 + pb^3 + p^2c^3 = 0$$

soit $a = b = c = 0$.

3. Trouver un entier p supérieur ou égal à 2 pour lequel l'équation précédente admet au moins une autre solution que $a = b = c = 0$.

Solution (P.L.H.)

1. Si la duplication du cube était possible, on aurait : $a^3 = 2b^3$.

Mais alors a^3 donc a , serait pair : $a = 2a'$ et $8a'^3 = 2b^3$ donc $4a'^3 = b^3$ donc b serait pair : $b = 2b'$ et $4a'^3 = 8b'^3$ ou $a'^3 = 2b'^3$.

Or si a et b ont pour PGCD d , $a = da_1$ et $b = db_1$ avec a_1 et b_1 premiers entre eux et $d^3a_1^3 = 2d^3b_1^3$ ou $a_1^3 = 2b_1^3$.

On arrive à une contradiction.

De même si $a^3 + 2b^3 + 4c^3 = 0$ avec a, b, c dans $\mathbb{Z}$.

Si deux des (a, b, c) sont nuls, le troisième a son cube nul et donc est nul.

Si un des (a, b, c) est nul et les deux autres non nuls, on a soit $a^3 + 4c^3 = 0$, soit $a^3 + 2b^3 = 0$, soit $2b^3 + 4c^3 = 0$ équivalent à $b^3 + 2c^3 = 0$.

On peut supposer les deux entiers premiers entre eux et on arrive à une contradiction avec le fait qu'ils devraient être pairs tous les deux. De même si les trois a, b, c étaient non nuls et premiers entre eux, il seraient tous les trois pairs, d'où la contradiction.

2. Si p est premier, on recommence le raisonnement fait avec p au lieu de 2.

3. L'équation $a^3 + 8b^3 + 64c^3 = 0$ admet les solutions
 $(\sqrt{2}, 1, 0) (-4, 0, 1) (0, -2, 1) \dots$

Remarque : très classique si on connaît la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et l'existence d'une infinité de nombres premiers.