

LA RÉUNION

Exercice n° 1

Enoncé

Carrés et cubes

On appelle « carré » un nombre qui est le carré d'un nombre entier.

On appelle « cube » un nombre qui est le cube d'un nombre entier.

Par exemple, 49 est un carré (car $49 = 7^2$) et 125 est un cube (car $125 = 5^3$).

Pour chacune des trois questions suivantes, on donnera le premier et le dernier nombre de la liste demandée et on justifiera la réponse.

Quelle est la première liste constituée de 1000 nombres entiers positifs consécutifs :

- a) qui ne contient aucun carré ?
- b) qui ne contient aucun cube ?
- c) qui ne contient aucun carré, ni aucun cube ?

Solution (P.L.H.)

a) La liste $(n, \dots, n + 999)$ ne contient aucun carré si et seulement si il existe un entier q tel que $q^2 \leq n - 1$ et $n + 1000 \leq (q + 1)^2$

d'où $q^2 \leq (q + 1)^2 - 1001$ ou $2q \geq 1000$ ou $q \geq 500$.

Pour $q = 500$, $q^2 = 250\,000$ et $(q + 1)^2 = 251\,001$; la liste 250 001, ... 251 000 est la première qui ne contient aucun carré.

b) De même la liste $(n, \dots, n + 999)$ ne contient aucun cube s'il existe un entier r tel que $r^3 \leq (r - 1)$ et $n + 1000 \leq (r + 1)^3$

d'où $r^3 \leq (r + 1)^3 - 1001$ ou $3r^2 + 3r \geq 1000$.

Or, pour $r = 17$, $3r(r + 1) = 918$ et $r^3 = 4913$,

et pour $r = 18$, $3r(r + 1) = 1026$.

La suite 4914 ... 5913 est la première suite qui ne contient aucun cube.

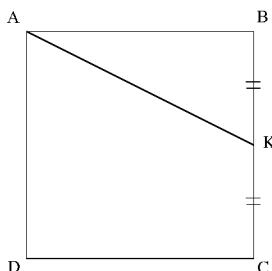
c) Revenons à la liste (250 001 ... 251 000) qui ne contient aucun carré. Elle contient $63^3 = 250\,047$.

La liste qui ne contient aucun carré suivante est (251 002 ... 252 001) ; elle ne contient aucun cube car $64^3 = 262\,144$.

Exercice n° 2

Enoncé

Partages



On veut partager une plaque carrée ABCD avec les trois contraintes suivantes :

- ce partage doit s'effectuer par 4 traits de scie dont l'un [AK] est déjà représenté sur la figure ;
- on doit obtenir 9 morceaux ;
- ces 9 morceaux doivent permettre de reconstituer 5 petits carrés identiques.

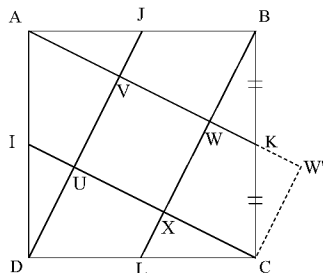
a) Faire un schéma illustrant le partage en 9 morceaux.

b) Indiquer la reconstitution de ces 9 morceaux en 5 carrés identiques.

c) Justifier.

Solution

a)



Les symétries de la figure invitent à la compléter par trois traits de scie : BL, CI, DJ où L, I et J sont les milieux respectifs de [CD], [DA] et [AB]. Soit O le centre du carré. L'invariance de la figure par une rotation de 90° autour de O montre que UVWX est un carré, que $UD = VA = WB = XC$ et $UI = VJ = WK = XL$. Thalès entraîne : $IU = \frac{AV}{2}$.

Si on prend comme unité le côté du grand carré, Pythagore donne $UI^2 + UD^2 = ID^2$ ou $UI^2 + 4UI^2 = \frac{1}{4}$.

Donc $UI = \frac{1}{2\sqrt{5}}$ et $AV = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $AK^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ d'où $AK = \frac{\sqrt{5}}{2}$ et

$$UV = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{3}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

b) La symétrie de centre K transforme le triangle BWK en CW'K et on reconstitue ainsi le carré WW'CX ; de même pour les trois autres.

c) Il faut justifier qu'on obtient ainsi la seule solution possible (si le premier trait est AK, ou sinon à une symétrie autour de (JL) près).

- les cinq petits carrés doivent avoir pour surface $\frac{1}{5}$ donc pour côté $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

- Comme il n'y a que 9 morceaux, un au moins des petits carrés constitue un seul morceau. Si on cherche à le placer dans la figure, il apparaît, à cause de AK, qu'il ne peut avoir ses côtés parallèles à ceux du grand carré. Alors ses quatre côtés doivent être prolongés par des traits de scie et l'un d'eux est sur AK. Il ne peut y avoir alors qu'un seul petit carré non découpé et chacun des 8 autres comporte deux morceaux trapézoïdaux ou triangulaires ; seuls les traits de scie DJ et BL remplissent cette condition.

Remarque : cet exercice assez classique et bien gradué, est à rapprocher de l'exercice 2 de Caen