

POITIERS

Exercice n° 1

Enoncé

Olympiades

1°) Combien y a-t-il de façons différentes de lire le mot « JEU » en suivant une ligne brisée selon les verticales et les horizontales ?

J	E	U
	J	E
		J

M	A	T	H
	M	A	T
		M	A
			M

Et le mot « MATH » ?

2°) a) Le nombre de façons différentes de lire le mot « OLYMPIADES » en suivant une ligne brisée selon les verticales et les horizontales dans le premier tableau ci-dessous à gauche est supérieur à 500. Quel est-il exactement ?

O	L	Y	M	P	I	A	D	E	S
	O	L	Y	M	P	I	A	D	E
		O	L	Y	M	P	I	A	D
			O	L	Y	M	P	I	A
				O	L	Y	M	P	I
					O	L	Y	M	P
						O	L	Y	M
							O	L	Y
								O	L
									O

O	L	Y	M	P	I	A	D	E	S
	O	L	Y	M	P	I	A	D	E
		O	L	Y	M			A	D
			O	L	Y	M	P	I	A
				O	L	Y	M	P	I
					O	L	Y	M	P
						O	L	Y	M
							O	L	Y
								O	L
									O

b) Maintenant il y a une tache noire infranchissable sur les lettres PI à la troisième ligne (deuxième tableau, à droite)... Quel est le nombre de façons de lire OLYMPIADES ?

3°) On revient à la grille OLYMPIADES de départ sans tache, où l'on envisage de disposer une tache ayant la forme d'un bloc vertical de trois lettres. Où faut-il mettre cette tache si l'on veut que le nombre de façon de lire OLYMPIADES soit :

b) Le minimum 64 s'obtient ainsi :

O	L	Y	M	P	I	A	D		S
	2	4	8	16	32	64	128		64
	O	L	M	P	I	A		E	
		2	4	8	16	32	64		64
		O	L	M	P	I		D	
			2	4	8	16	32		64
			O	L	M	P		A	
				2	4	8	16	32	64
				O	L	M	P		T
					2	4	8	16	32
					O	L	M	P	
						2	4	8	16
						O	L	M	
							2	4	8
							O	L	4
								2	O

Exercice n° 2 (S et ES)

Enoncé

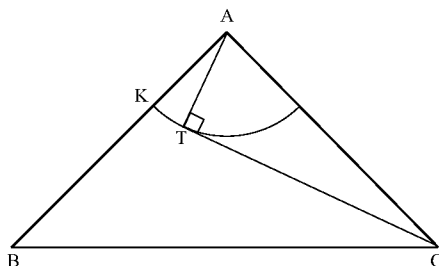
Jardin public

Un jardin public a la forme d'un triangle ABC isocèle rectangle en A, avec $AB = 130$ m. Un parterre a été tracé : c'est un secteur circulaire, centré en A, de 50 m de rayon et **il est impossible d'y marcher**. L'arc de cercle coupe [AB] en K.

1. Un enfant court de B vers K puis de K doit rejoindre C. Quel est le trajet le plus court (justification non demandée) ? En donner une approximation à 0,1 m près.
2. Un autre enfant part lui aussi de B, doit toucher un point de l'arc de cercle et rejoindre C.
Quel est le trajet le plus court ? (justifier votre réponse).
En donner une approximation à 0,1 m près.

Solution

- 1) Notons T l'intersection du quart de cercle avec sa tangente issue de C.



Le trajet le plus court est obtenu lorsque l'enfant va de B vers K puis suit l'arc de cercle KT et enfin le segment TC.

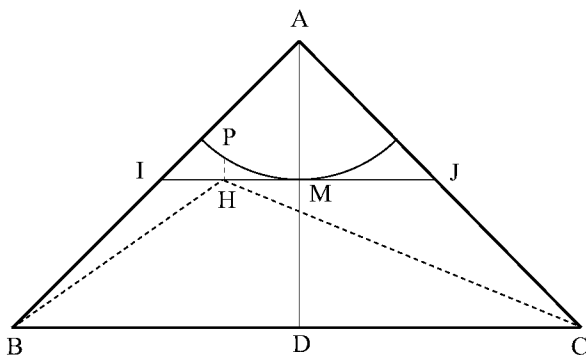
D'après le théorème de Pythagore

$$TC^2 = AC^2 - AT^2 = 130^2 - 50^2 = 120^2$$

$$TC = 120.$$

L'angle (CA, CT) est égal à l'angle (AK, AT) et le sinus de ces angles est $\frac{50}{130}$. La mesure de ces angles est égale environ à 0.3948 rd. La longueur de l'arc KT est environ $50 \times 0,3948 = 19,7$ m (à 0,1 m près). La distance parcourue par l'enfant est (à 0,1 m près) : $(130 - 50) + 19,7 + 120 = 219,7$ m.

2) Traçons la parallèle à BC qui est tangente au quart de cercle et notons M le point commun à cette tangente et au quart de cercle. Cette tangente coupe respectivement AB et AC en I et J. Soit P un point du quart de cercle; notons H le projeté orthogonal de P sur IJ



Montrons que le trajet le plus court pour aller de B à C en venant toucher le quart de cercle est $BM + MC$. $BP > BH$ et $CP > CH$ donc pour montrer que ce minimum est atteint lorsque $P=M$, il suffit de montrer que $BM + MC < BH + HC$. Une méthode classique consiste à tracer le symétrique B' de B par rapport à (IJ) et à remarquer que B' , M et C sont alignés.

$$BM + MC = B'M + MC = B'C < B'H + HC = BH + HC.$$

On peut aussi montrer cela analytiquement en posant $x = HM$, $a = BD$ et $b = DM$.

La valeur de $BH + HC$ est $f(x) = \sqrt{(x-a)^2 + b^2} + \sqrt{(x+a)^2 + b^2}$.

En remarquant que $(a-x) > 0$ et $(a+x) > 0$, on peut écrire :

$$f(x) = \sqrt{(x-a)^2 + b^2} + \sqrt{(x+a)^2 + b^2}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2 + b^2}} + \frac{(a+x)}{\sqrt{(a+x)^2 + b^2}} \\
f'(x) < 0 &\Leftrightarrow \frac{(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2 + b^2}} > \frac{(a+x)}{\sqrt{(a+x)^2 + b^2}} \\
&\Leftrightarrow \frac{(a-x)^2}{(a-x)^2 + b^2} > \frac{(a+x)^2}{(a+x)^2 + b^2} \\
&\Leftrightarrow \frac{(a-x)^2 + b^2}{(a-x)^2} < \frac{(a+x)^2 + b^2}{(a+x)^2} \\
&\Leftrightarrow \frac{b^2}{(a-x)^2} < \frac{b^2}{(a+x)^2} \\
&\Leftrightarrow (a-x)^2 > (a+x)^2 \\
&\Leftrightarrow 4ax < 0 \Leftrightarrow x < 0
\end{aligned}$$

On en déduit que f atteint son minimum pour $x = 0$ c'est-à-dire que $BH + HC$ est minimale lorsque H est en M .

$$BD = \frac{130}{\sqrt{2}} ; DM = \frac{130}{\sqrt{2}} - 50$$

$$BM^2 = BD^2 + DM^2 = \frac{16\,900}{2} + \frac{16\,900}{2} + 2\,500 - 50 \times 130\sqrt{2} \approx 10\,207.$$

Cette longueur minimale est donc $2BM$ et vaut environ 202 m.

Exercice n° 3 (autres sections)

Enoncé

Grilles

On considère deux grilles carrées ayant chacune n lignes et n colonnes. On remplit la première grille en remplissant « en ligne » par les nombres de 1 à p puis en recommençant de 1 à p jusqu'à ce que toute la grille soit remplie (Quand on arrive à la fin d'une ligne on continue sur la ligne suivante).

On remplit la deuxième grille suivant le même processus mais en procédant « en colonne ».

Par exemple, si $n = 5$ et $p = 3$ la première grille (à gauche) et la seconde grille (à droite) sont

1	2	3	1	2
3	1	2	3	1
2	3	1	2	3
1	2	3	1	2
3	1	2	3	1

1	3	2	1	3
2	1	3	2	1
3	2	1	3	2
1	3	2	1	3
2	1	3	2	1

On s'intéresse au nombre N de cases de ces deux grilles ayant le même nombre dans chacune des deux grilles. (Dans l'exemple ci-dessus toutes ces cases contiennent des 1 et $N = 9$).

Pour les trois questions qui suivent, donner seulement la réponse. En particulier, aucune grille ne sera dessinée pour ces 3 questions.

1. Quelle est la valeur de N lorsque $p = 2$ et n vaut successivement 2, 3, 4 et 5 ?
2. Quelle est la valeur de N lorsque $p = 3$ et n vaut successivement 6 et 7 ?
3. Quelle est la valeur de N lorsque $p = 4$ et $n = 7$?
Pour la quatrième question, donner la réponse et la justifier si possible.
4. Quelle est la valeur de N lorsque $p = 2$ et n quelconque ?

Solution

1. Lorsque $p = 2$ et n vaut successivement 2, 3, 4 et 5, alors, $N = 2$, puis $N = 9$, puis $N = 8$ puis $N = 25$.
2. Lorsque $p = 3$ et n vaut successivement 6 et 7 alors $N = 12$, puis $N = 49$.
3. Lorsque $p = 4$ et $n = 7$ alors $N = 25$.
4. Si n est impair, toutes les cases de ces deux grilles sont remplies avec les mêmes nombres donc $N = n^2$.
Si n est pair, dans la grille de gauche, toutes les cases d'une colonne sont identiques alors que dans la grille de droite, sur une colonne, il y a alternativement 1 et 2 donc dans une colonne il y a $n/2$ cases identiques. Dans l'ensemble de la grille, il y a $n^2/2$ cases identiques.