

PARIS

Exercice n° 1

Énoncé

Le flipper

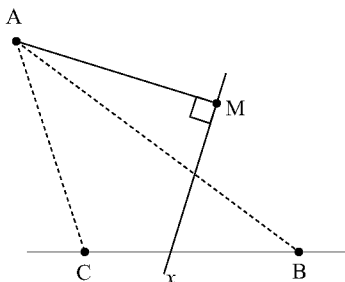
On considère une table de flipper ; sur cette table sont placés trois plots non alignés A, B et C, assimilés à des points. On veut choisir un autre point M sur la table, où l'on va placer un mécanisme qui agit de la façon suivante :

Toute bille partie de A et arrivée en M est ensuite renvoyée de M vers la droite (BC) perpendiculairement à la droite (AM). Les deux parties de la trajectoire sont supposées rectilignes.

Représenter l'ensemble des points M du demi-plan de frontière (BC) et contenant A, pour lesquels la bille lancée de A et passée en M passera ensuite entre B et C.

Solution

On doit placer M de façon que la perpendiculaire à (AM) passant par M coupe le segment [BC] ; cette droite (Mx) ne doit pas passer par A ni par B ni par C.

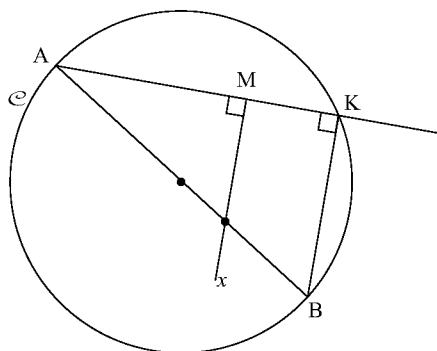


Les droites qui coupent le côté BC de ABC sont les droites qui coupent le côté $[AB]$ ou le côté $[AC]$ mais pas les deux simultanément.

A quelle condition (Mx) coupe-t-elle $[AB]$?

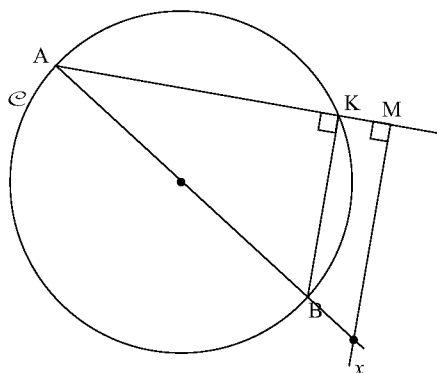
Soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$. Si M est à l'intérieur de $\mathcal{C}$, (AM) recoupe $\mathcal{C}$ en K .

On a $(Mx) \parallel (KB)$ car (Mx) et (KB) sont perpendiculaires à (AM) .

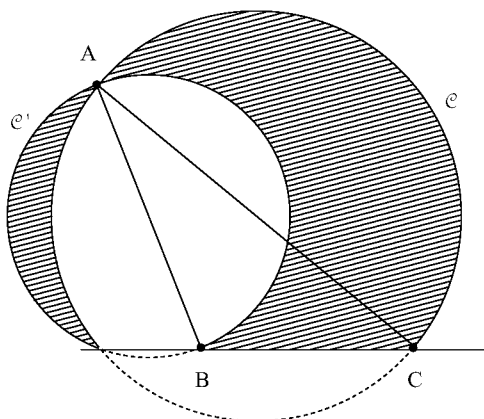


Alors (Mx) coupe la droite (AB) entre A et B .

Si M est à l'extérieur de $\mathcal{C}$, ou bien (AM) est tangente à $\mathcal{C}$ et (Mx) est parallèle à (AB) ; ou bien (AM) recoupe $\mathcal{C}$ en K (même raisonnement que ci-dessus) et (Mx) coupe (AB) à l'extérieur de $[AB]$.



Donc la droite (Mx) rencontre $[AB]$ si et seulement si M est à l'intérieur de $\mathcal{C}$. De même, (Mx) rencontre $[AC]$ si et seulement si M est à l'intérieur de $\mathcal{C}'$, cercle de diamètre $[AC]$.



On placera donc M dans $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}' - \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ hachuré ci-dessus.

Exercice n° 2

Enoncé

Autour d'une table

26 personnes dont les âges sont respectivement chacun des entiers compris entre 35 et 60 sont assises autour d'une table.

Montrer qu'il existe quatre personnes assises côte à côte dont la somme des âges est inférieure ou égale à 190.

Solution

Les personnes étant assises, on désigne par $A, B, \dots, Z$ les âges des 26 personnes dans le sens trigonométrique, la première étant choisie au hasard. On pose $S_A = A + B + C + D$, $S_B = B + C + D + E, \dots$, $S_Z = Z + A + B + C$.

On remarque que la somme $\Sigma = S_A + S_B + \dots + S_Z$ contient quatre fois tous les entiers compris entre 35 et 60 donc $\Sigma = 4940$.

La moyenne des sommes $S_A, S_B, \dots, S_Z$ est $\frac{4940}{26} = 190$.

Par définition de la moyenne, il existe au moins une somme parmi $S_A, S_B, \dots, S_Z$ inférieure ou égale à 190, donc il existe quatre personnes assises côte à côte dont la somme des âges est inférieure ou égale à 190.

ERRATA 2004

Monsieur Serge FERRI avait, en 2004, conçu le deuxième sujet académique de Paris (Cf. « *Les Olympiades académiques de mathématiques 2004* », page 202 : « La balle au bond »).

Or, dans notre brochure, son corrigé a été amputé des réponses aux deux dernières questions.

Nous sommes navrés de cette inadvertance, d'autant que Monsieur S. Ferri est décédé en juin 2004.

Voici le corrigé manquant :

④ Du résultat précédent, on tire : $h = 15$ équivalent à $\frac{1}{2^n}$, ce qui est impossible. Donc si $h = 15$ mètres, la balle ne peut pas tomber en T.

⑤ De $h = \frac{30}{2 - \frac{1}{2^n}}$, on tire $2^n = \frac{h}{2h - 30}$ donc $r = 2^n$.

La balle atteint donc le trou T à la condition que le rapport $r = \frac{h}{2h - 30}$ soit une puissance de 2, l'exposant étant alors le nombre de rebonds.