

ORLÉANS

Exercice n° 1

Enoncé

Les cubes

On prend un certain nombre de cubes de un centimètre de côté que l'on accole face contre face de façon à constituer a rangées de b cubes (a et b sont deux entiers), sans laisser d'espace vide entre les petits cubes. On obtient ainsi un parallélépipède rectangle de hauteur un centimètre, de largeur a cm et de longueur b cm. On appelle « aire du parallélépipède » la somme des aires de ses faces.

1°) Déterminer le nombre de cubes utilisés, sachant que l'aire du parallélépipède est égale à 100 cm^2 . (On sera amené à utiliser la décomposition en facteurs premiers de 51).

2°) Quel est le nombre minimal de cubes que l'on doit disposer ainsi pour que l'aire du parallélépipède obtenu soit égale à $0,401 \text{ m}^2$?

NB : On donne à toutes fins utiles la liste des nombres premiers inférieurs à 100 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97 .

Solution

L'aire extérieure, en cm^2 , d'un parallélépipède rectangle de dimensions (en cm) a, b et 1 est :

$$A = 2ab + 2b \times 1 + 2a \times 1 = 2(ab + a + b).$$

L'expression de A est « symétrique en a et b », on peut raisonner en imposant que a est inférieur ou égal à b .

1^{ère} question

$51 = 3 \times 17$, où 3 et 17 sont premiers.

$A = 100$ est équivalent à $2(ab + a + b) = 100$;

$A = 100$ est équivalent à $ab + a + b = 50$;

en ajoutant 1 membre à membre,

$A = 100$ est équivalent à $ab + a + b + 1 = 51$.

On a : $ab + a + b + 1 = a(b + 1) + b + 1 = (a + 1)(b + 1)$.

Ainsi, $A = 100$ est équivalent à $(a + 1)(b + 1) = 3 \times 17$.

Puisque $(a + 1)$ et $(b + 1)$ sont des entiers, et que $2 \leq a + 1 \leq b + 1$, on a forcément : $(a + 1) = 3$ et $(b + 1) = 17$, donc $a = 2$ et $b = 16$.

Ainsi, $A = 100$ est équivalent à $a = 2$ et $b = 16$.

Le nombre de cubes est alors $ab = 32$.

Après vérification, on peut conclure que le parallélépipède a pour largeur $a = 2$ cm et pour longueur $b = 16$ cm, et que :

le nombre total de cubes utilisés est 32.

2^{ème} question

$0,401 \text{ m}^2 = 4010 \text{ cm}^2$

$A = 4010$ est équivalent à $2(ab + a + b) = 4010$;

$A = 4010$ est équivalent à $ab + a + b = 2005$;

en ajoutant 1 membre à membre,

$A = 4010$ est équivalent à $ab + a + b + 1 = 2006$.

On a prouvé dans la 1^{ère} question l'égalité $ab + a + b + 1 = (a + 1)(b + 1)$.

$A = 4010$ est équivalent à $(a + 1)(b + 1) = 2006$.

La décomposition de 2006 en produit de facteurs premiers est $2006 = 2 \times 17 \times 59$.

On peut écrire $2006 = 2 \times (17 \times 59)$, $2006 = (2 \times 17) \times 59 = 17 \times (2 \times 59)$.

$(a + 1)$ et $(b + 1)$ sont des entiers, et $2 \leq a + 1 \leq b + 1$,

or les seules décompositions de 2006 en produit d'entiers supérieurs ou égaux à 2 sont : 2×1003 , 34×59 et 17×118 .

Ainsi : « $A = 4010$ » est équivalent à

« $(a + 1) = 2$ et $(b + 1) = 1003$ » ou « $(a + 1) = 34$ et $(b + 1) = 59$ » ou « $(a + 1) = 17$ et $(b + 1) = 118$ »

« $A = 4010$ » est équivalent à « $a = 1$ et $b = 1002$ » ou « $a = 33$ et $b = 58$ » ou « $a = 16$ et $b = 117$ ».

Si « $a = 1$ et $b = 1002$ », le nombre total de cubes utilisés est :
 $1 \times 1002 = 1002$;

Si « $a = 33$ et $b = 58$ », le nombre total de cubes utilisés est :
 $33 \times 58 = 1914$;

Si « $a = 16$ et $b = 117$ », le nombre total de cubes utilisés est :
 $16 \times 117 = 1872$;

$1002 < 1872 < 1914$

Conclusion

Le nombre minimal de cubes utilisés est 1002.

Exercice n° 2

Enoncé

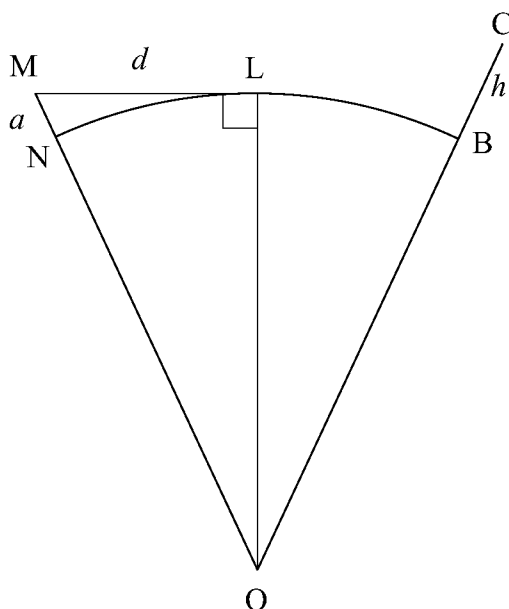
Horizons entre Corse et Nice

La figure ci-dessous représente une coupe de la sphère terrestre par un plan passant par son centre O . On y a marqué les points M et C figurant les sommets respectifs du Mont Chauve d'Aspremont près de Nice et du Monte Cinto en Corse.

On donne le rayon terrestre $R = 6370$ km. On indique d'autre part que le Monte Cinto culmine à l'altitude $h = BC = 2710$ m et le Mont Chauve d'Aspremont à l'altitude $a = NM = 854$ m. La distance BN est de 210 km, cette distance correspondant à la mesure de l'arc de cercle BN indiqué sur la figure.(voir page suivante)

1°) Depuis le sommet M du Mont Chauve, à quelle distance d sont les points qui comme L sont situés à l'horizon, au niveau de la mer ? Quelle est alors la mesure de l'arc NL ? Comparer cette mesure avec d .

2°) Donner un encadrement de l'altitude des points situés sur les parois du Monte Cinto et visibles depuis le sommet M .



Solution

1°) Le triangle OLM est rectangle en L, donc $(R + a)^2 = R^2 + d^2$ d'où $d^2 = 2aR + a^2$. [puisque $OL = ON = R$; $NM = a$; $LM = d$; $OM = R + a$].

Il est important d'écrire toutes les longueurs (altitudes comme distances) dans la même unité, soit le kilomètre.

Alors : $d^2 = 1,708 \times 6370 + 0,854^2 = 10\,880,689316$

et ainsi $\boxed{d = 104,310 \text{ km}}$ (à un mètre près).

Soit α l'angle $\widehat{LOM}$, exprimé en radians ; on le trouve par la relation :

$\tan(\alpha) = \frac{d}{R}$; et la longueur de l'arc LN est alors égale à $\alpha.R$,

soit : $\alpha = 0,016373818$ et $LN = 104,301 \text{ km}$

La différence de longueurs entre le segment LM et l'arc LN vaut 9 mètres environ, soit une erreur relative inférieure à 0,01%.

2°) La valeur maximale de l'altitude est bien évidemment 2710 m. En remarquant que LB et LN ont des valeurs voisines (L est situé à mi-distance de B et N), on peut admettre une approximation semblable à celle du 1°.

Soit b l'altitude (en km) du point P situé sur (BC) tel que PL soit tangent à l'arc de cercle, et une mesure en radians de l'angle au centre $\widehat{LOB}$.

On a : $LB = \beta.R$ et $\cos \beta = \frac{R}{R+b}$ donc : $b = R \frac{(1 - \cos \beta)}{\cos \beta}$.

On calcule alors : $\beta = \frac{210 - 104,3}{6370} = 0,016\,593\,4$ puis $b = 0,877\,06$ km.

Soit une altitude minimale (du point visible sur le Monte Cinto) valant **877 m**.

Étude supplémentaire

Selon qu'on prend 853 m, 854 m, ou 855 m comme altitude (depuis Nice), on trouve une distance LM successivement égale à : 104,25 km, 104,31 km, ou 104,37 km (*à 2 mètres près*).

Si l'on veut être « rigoureux » en 2°, prenons le triangle OLP, rectangle en L, et résolvons une équation d'inconnue b , du second degré (avec b en km) :

$$b^2 + 2bR - (BN - d)^2 = 0, \text{ soit } b^2 + 1\,2740b - 11\,170,261\,4 = 0.$$

Ne considérant que la racine positive (en calculant avec le discriminant réduit) : $b = -6370 + \sqrt{6\,370^2 + 11\,170,261\,4} = 0,876\,7$ km, soit $b' = 877$ m. (avec b' la mesure en mètres de b)