

NICE

Exercice n° 1

Enoncé

Une élection particulière

Trois candidats se présentent à une élection. On suppose que chaque électeur vote obligatoirement pour un et un seul candidat, et que les candidats ne votent pas.

1. Il n'y a que 4 électeurs : Voici des exemples de résultats possibles :

Candidat A : 3 voix	Candidat A : 2 voix
Candidat B : 0 voix	Candidat B : 1 voix
Candidat C : 1 voix	Candidat C : 1 voix

Combien y a-t-il de résultats différents possibles ?

2. S'il y a 100 électeurs, combien y a-t-il alors de résultats différents possibles ?

Solution

On appelle n le nombre d'électeurs.

1. Cas où il y a 4 électeurs : ($n = 4$).

Nombre de voix de A	Nombre de voix de B	Nombre de voix de C	Nombre de résultats
0	0	4	5
	1	3	
	2	2	
	3	1	
	4		

Nombre de voix de A	Nombre de voix de B	Nombre de voix de C	Nombre de résultats
1	0	3	4
	1	2	
	2	1	
	3	0	
2	0	2	3
	1	1	
	2	0	
3	0	1	2
	1	0	
4	0	0	1

On a donc $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ résultats différents possibles

2. cas où il y a n électeurs : on peut disposer le comptage de la même façon :

On appelle a le nombre de voix de A, b , nombre de voix de B, et c le nombre de voix de C

A chaque valeur k de a ($0 \leq k \leq n$), on associe les $n - k + 1$ valeurs possibles pour b de 0 à $n - k$, la valeur de c étant déterminée ensuite par $c = n - (a + b)$.

Nombre de voix de A	Nombre de voix de B possibles	Nombre de résultats correspondants
$a = 0$	$n, n - 1, \dots, 0$	$n + 1$
$a = 1$	$n - 1, n - 2, \dots, 1, 0$	n
$a = 2$	$n - 2, n - 3, \dots, 2, 1, 0$	$n - 1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a = k$	$n - k, n - k - 1, \dots, 2, 1, 0$	$n - k + 1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a = n - 1$	$0, 1$	2
$a = n$	0	1

Le nombre total de résultats possibles est donc la somme des entiers de

1 à $n + 1$: $\boxed{\frac{(n + 1)(n + 2)}{2}}$

Donc si $n = 100$ on a $\frac{101 \times 102}{2} = 5\,151$ résultats possibles.

Autre solution

Paul-Louis Hennequin

Supposons qu'il y ait n électeurs et k candidats.

Soient $a, b, c, \dots, \ell$ le nombre de voix obtenues par A, B, C, $\dots$ L. On a $a \geq 0, b \geq 0, \dots, \ell \geq 0$ et $a + b + \dots + \ell = n$.

Représentons ce résultat par une suite de a croix suivies d'une barre, de b croix suivies d'une barre... de ℓ croix.

Par exemple, si $k = 3$ $a = 2, b = 1, c = 1$.

La suite sera : $\times \times | \times | \times$.

Inversement, toute suite de n croix et $\ell - 1$ barres définit un résultat, par exemple $| \times \times \times \times |$ correspond à $a = 0, b = 4, c = 0$.

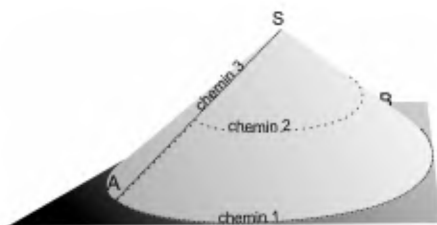
Compter le nombre de telles suites équivaut à compter le nombre de sous-ensembles de cardinal $\ell - 1$ d'un ensemble de cardinal $n + \ell - 1$; on sait, par définition de « $\ell - 1$ parmi $n + \ell - 1$ » que c'est

$$\binom{n + \ell - 1}{\ell - 1} = \frac{(n + \ell - 1) \cdots (n + 1)}{(\ell - 1)!}.$$

Exercice n° 2

Énoncé

Le cône

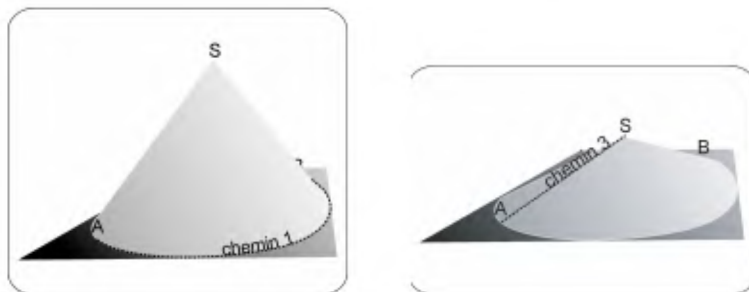


Un cône dont le rayon de la base est 1 et la hauteur h est donné. Les points A et B, diamétralement opposés sur la base du cône, peuvent être reliés par trois types de chemins. Le premier contourne la base, le second monte vers le sommet S, tourne autour du cône à l'altitude x , et redescend vers B, le troisième passe par le sommet S. Quel est le plus court des chemins reliant A et B ?

(Vous pourrez commencer par réfléchir à cette question pour une hauteur de $h = 2$.)

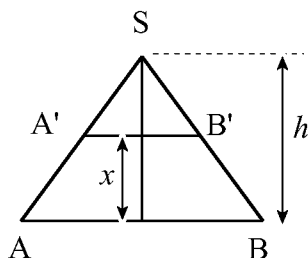
Solution

L'influence de la hauteur est déterminante. Intuitivement, face à un cône très haut, il convient d'emprunter le chemin 1.



Face à un cône très plat, il convient d'emprunter le chemin 3.

Le calcul du chemin 2 se fait en trois étapes.



L'ascension jusqu'à la hauteur x le long de l'arête : $\sqrt{1+h^2} \times \frac{x}{h}$.

Le contournement à l'altitude x qui est un demi-cercle : $\pi \left(1 - \frac{x}{h}\right)$.

Et la redescente vers B : $\sqrt{1+h^2} \times \frac{x}{h}$.

Ainsi, une fonction est obtenue qui décrit le chemin 2, ce chemin contient les chemins 1 et 3 comme cas limites, il suffit pour cela de prendre $x = 0$ ou $x = h$:

$$\begin{aligned} C(x) &= 2\sqrt{1+h^2} \times \frac{x}{h} + \pi \left(1 - \frac{x}{h}\right) \\ &= \pi + \frac{x}{h} \left(2\sqrt{1+h^2} - \pi\right). \end{aligned}$$

La fonction de x obtenue est une fonction affine du type $f(x) = ax + b$ avec $b = \pi > 0$. Il suffit d'étudier le signe de a pour conclure.

$$2\sqrt{1+h^2} - \pi > 0 \Leftrightarrow h > \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1}.$$

Ainsi, si $h > \sqrt{\frac{\pi^2}{4}} - 1$, la fonction est croissante et le plus court chemin est obtenu pour la valeur de x la plus petite, c'est-à-dire $x = 0$. Le plus court chemin est alors le chemin 1.

Si $h < \sqrt{\frac{\pi^2}{4}} - 1$, la fonction est décroissante et le plus court chemin est obtenu pour la valeur de x la plus grande, c'est-à-dire $x = h$. Le plus court chemin est alors le chemin 3.

Le chemin 2 n'est jamais le plus court.