

NANCY-METZ

Exercice n° 1

Enoncé

Les bacs sur l'Amazone

Deux bacs partent en même temps des deux rives opposées de l'Amazone et naviguent à vitesse constante.

L'un étant plus rapide que l'autre, ils se croisent à 1500 mètres de la rive la plus proche.

Arrivés à destination, les deux bateaux restent à quai 25 minutes, le temps du débarquement des passagers et de l'embarquement de nouveaux passagers, puis larguent les amarres pour repartir vers leur point de départ.

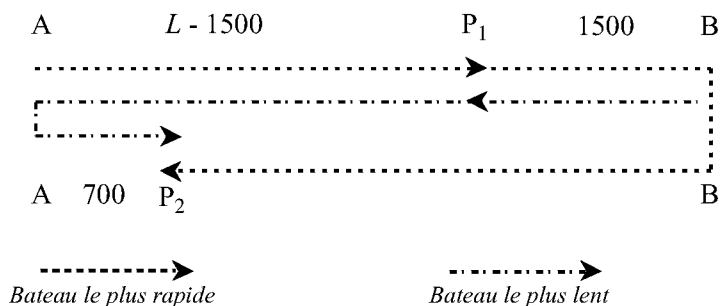
Ils se croisent une seconde fois à 700 mètres de la rive la plus proche.

Quelle est la largeur de l'Amazone entre ces deux rives ?

Solutions

Première solution

Notons A et B les points opposés des rives de l'amazone, posons $AB = L$ et supposons que le bateau le plus rapide parte du point A. Les deux bateaux se croisent en P_1 puis en P_2 . On a le schéma suivant :



Lors de leur première rencontre, les deux bateaux ont, à eux deux, parcouru une distance L (égale à la largeur du fleuve).

Lors de leur seconde rencontre, les bateaux ont, à eux deux parcouru une distance égale à $3L$.

Donc, lors de leur seconde rencontre, les bateaux ont parcouru, à eux deux, trois fois plus de distance que lors de leur première rencontre. Les deux bateaux se déplaçant à vitesses constantes (mais non égales) ceci est vrai pour chacun des deux bacs, donc en particulier pour le plus lent qui a donc parcouru : $1500\text{m} \times 3 = 4500\text{ m}$.

Cette distance est supérieure de 700 mètres à la largeur du fleuve.

A cet endroit l'Amazone a pour largeur

$$4500\text{ m} - 700\text{ m} = 3\,800\text{ m}.$$

Deuxième solution

On note x la largeur en mètres de l'Amazone à l'endroit considéré, V_1 la vitesse en $\text{m} \times \text{h}^{-1}$ du bac le plus rapide et V_2 la vitesse en $\text{m} \times \text{h}^{-1}$ de l'autre bac.

x , V_1 et V_2 vérifient le système :

$$\begin{cases} \frac{x - 1500}{V_1} = \frac{1500}{V_2} \\ \frac{2x - 700}{V_1} = \frac{x + 700}{V_2} \end{cases}$$

Si on pose $\frac{V_1}{V_2} = k$, x et k vérifient le système :

$$\begin{cases} x - 1500 = k \times 1500 \\ 2x - 700 = k \times (x + 700) \end{cases} .$$

On obtient facilement $x = 3\,800$.

La largeur cherchée est 3 800 m.

Exercice n° 2

Enoncé

Rayons lumineux

Lorsqu'un rayon lumineux se réfléchit sur un miroir plan en un point M , l'angle i et l'angle r sont égaux (voir figure 1).

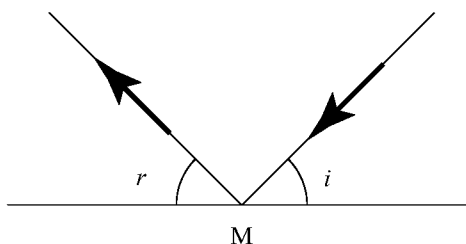


Figure 1

BC et BD sont deux miroirs de grande longueur formant un angle non nul α compris entre 0° et 90° . Un laser positionné en un point A émet un rayon vers BC parallèlement à BD qui se réfléchit en A_1 . Si i est différent de 90° (voir figure 2), le rayon réfléchi se dirige alors vers le point A_2 de BD en s'approchant de B et subit une nouvelle réflexion.

On veut étudier le nombre k de fois que le rayon frappe l'un ou l'autre des deux miroirs.

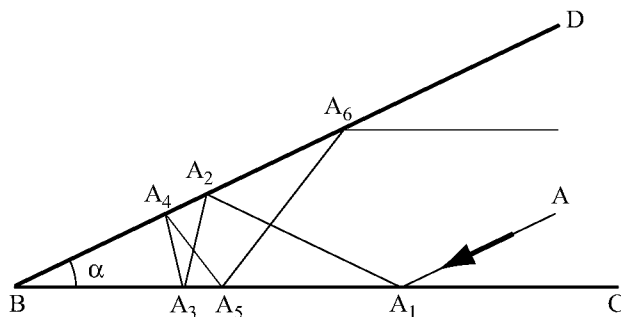


Figure 2

1) Analyse de quelques cas particuliers

- Que vaut le nombre k lorsque $\alpha = 90^\circ$? $\alpha = 60^\circ$? $\alpha = 45^\circ$?
- Sur la figure 2 l'angle α vaut 26° . Déterminer les différents angles i_n et r_n en chacun des points A_n ($1 \leq n \leq 6$) où le rayon est réfléchi. Le nombre k peut-il être supérieur à 6 ?

2) Analyse du cas général

Dans cette question on suppose que α est quelconque entre 0° et 90° (différent de 0° et de 90°).

- Le rayon peut-il s'approcher indéfiniment de B ?
- Donnez un encadrement du nombre k en fonction de α .
- Quelles valeurs entières peut-on donner à α pour avoir $k = 25$?

Une solution

- 1) a) Si $\alpha = 90^\circ$, $k = 1$. Si $\alpha = 60^\circ$, $k = 2$. Si $\alpha = 45^\circ$, $k = 3$.
 b) Si $\alpha = 26^\circ$ on obtient les angles i_n et r_n en chaque point A_n en analysant les angles des triangles BA_nA_{n+1} pour n variant de 1 à 5. Les différents angles sont donnés dans le tableau

Point a_n	Angle i_n ou r_n (en $^\circ$)
A_1	26
A_2	52
A_3	78
A_4	76
A_5	50
A_6	24

On peut remarquer que tant que n est inférieur ou égal à 3 les angles i et r sont en progression arithmétique de raison 26° et le rayon s'approche de B. Après réflexion en A_3 le rayon cesse de s'approcher de B et atteint le miroir BD en A_4 avec un angle i de 76° . On peut observer ensuite que les angles i et r obtenus pour les réflexions suivantes sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison (-26°) . En A_6 l'angle r étant plus petit que 26° , l'angle formé par les deux miroirs, le rayon n'a plus d'intersection avec le miroir BC et de ce fait poursuivra sa route de manière rectiligne.

Le nombre k est donc égal à 6.

- 2) En reprenant l'analyse précédente pour α quelconque, dans un premier temps, le rayon se rapproche de B et l'angle i_n , et donc r_n , prend les premières valeurs de la suite arithmétique u de raison α et de premier terme $u_1 = \alpha$. En effet en analysant les angles dans la figure 1 si l'angle $i_n = u_n$ l'angle $(\widehat{DA_{n+1}A_n})$ mesure $u_{n+1} = u_n + \alpha$ et si $u_{n+1} < 90^\circ$ cet angle est i_{n+1} .

On a donc durant cette phase $i_n = \alpha + (n-1)\alpha = n\alpha$. Cette première phase se produit tant que l'angle u_{n+1} calculé de cette manière est inférieur à 90° donc tant que $(n+1)\alpha < 90^\circ$.

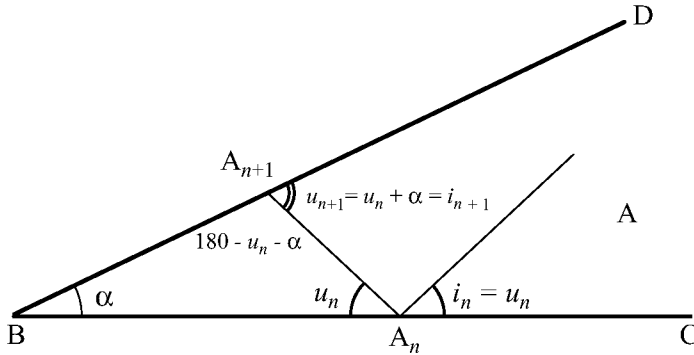


Figure 1

On appelle N l'entier tel que $N < 90$ et que $(N+1)\alpha > 90$ (son existence est assurée par le fait que u est strictement croissante, que $u_1 = \alpha < 90$ et que u admet pour limite $+\infty$). L'angle $i_N = u_N$ est inférieur à 90° mais l'angle $(\widehat{DA_{N+1}A_N})$ mesurant $u_N + \alpha$, est supérieur à 90° (figure 2) alors

i_{N+1} n'est plus l'angle $(\widehat{DA_{N+1}A_N})$ mais l'angle $(\widehat{BA_{N+1}A_N})$ qui mesure : $180 - u_N - \alpha = 180 - N\alpha - \alpha = 180 - (N+1)\alpha$.

Le rayon commencera alors à s'éloigner de B, c'est la deuxième phase. Le rayon ne peut donc s'approcher indéfiniment de B.

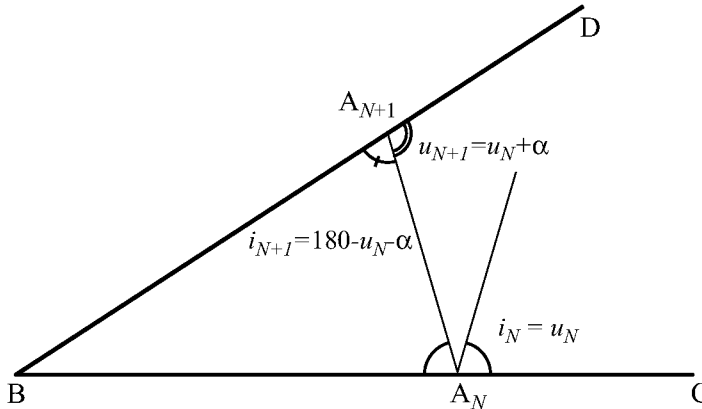
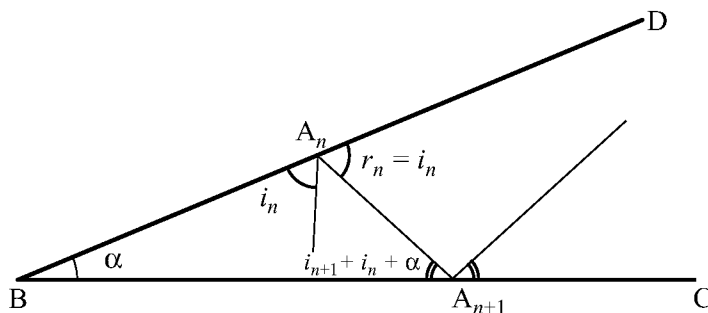


Figure 2

Ensuite, pour $n > N$, les réflexions se poursuivront sur le modèle suivant : (figure page suivante)

Les mesures des angles i_n et donc r_n forment donc, dans cette phase, les termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $(-\alpha)$ dont le premier terme est $180 - (N+1)\alpha$.



Si le rayon effectue k réflexions ($k > N$) alors $\boxed{i_k = r_k = 180 - k\alpha}$.

Pour qu'il y ait exactement k réflexions il faut que : $0 < r_k \leq \alpha$ ce qui donne l'encadrement $0 < 180 - k\alpha \leq \alpha$ et donc on en conclut que

$$\frac{180 - \alpha}{\alpha} \leq \frac{180}{\alpha} \text{ ou encore que } \boxed{\frac{180}{\alpha} - 1 \leq k < \frac{180}{\alpha}}.$$

Pour avoir $k = 25$, il faut que : $0 < 180 - 25\alpha \leq \alpha$ soit $\frac{180}{26} \leq \alpha < \frac{180}{25}$.

Une seule valeur entière est possible : $\boxed{\alpha = 7}$.