

MONTPELLIER

Exercice n° 1

Énoncé

Les Nombres formidables

On considère l'ensemble des nombres entiers strictement positifs. On définit l'opération collage de deux nombres entiers M et N par $M * N = MN$.

Ainsi $6 * 4 = 64$
 $35 * 2 = 352$
 $17 * 35 = 1735$.

Un entier N est formidable si N divise $M * N$ pour tout entier M .

2 est formidable !

3 est-il formidable ?

Combien y a-t-il de nombres formidables à un chiffre ?

Combien y a-t-il de nombres formidables inférieurs à 2005 ?

Solution

2 est formidable puisque $M * N$ se termine par 2 et est donc toujours divisible par 2.

3 ne l'est pas puisque 3 ne divise pas 13.

On remarque que 1, 2 et 5 sont formidables et que les autres ne le sont pas.

Pour les nombres à deux chiffres on peut écrire $M * N = 100M + N$.

Pour que N divise $100M + N$, il faut que N divise 100 (obtenu pour $M = 1$) cette condition est visiblement suffisante.

Pour les nombres à trois chiffres, il faut et il suffit que N divise 1000.

Pour les nombres à quatre chiffres il faut et il suffit que N divise 10000.

D'où la liste 1, 2, 5, 10, 20, 25, 50, 100, 125, 200, 250, 500, 1000, 1250, 2000 ;

15 nombres formidables inférieurs à 2005.

Exercice n° 2

Enoncé

On considère trois nombres positifs a, b et c tels que $a + b + c = 1$.
Pour quelles valeurs de a, b et c la somme $ab + ac$ est-elle maximum ?
Quelle est alors la valeur de ce maximum ?

On considère quatre nombres positifs a, b, c et d tels que

$$a + b + c + d = 1.$$

Pour quelles valeurs de a, b, c et d la somme $ab + ac + ad$ est-elle maximum ?
Quelle est alors la valeur de ce maximum ?

Eléments de correction

$ab + ac = a(b + c) = a(1 - a)$. L'étude de la fonction qui à x associe $x(1 - x)$ montre qu'elle admet un maximum sur $\mathbb{R}$ pour $x = 1/2$.

On peut aussi tester des valeurs et montrer une fois que $1/2$ apparaît comme le « bon candidat » que $\frac{1}{2} - a + a^2$ est positif ou nul.

Le maximum est donc $1/4$ obtenu pour $a = \frac{1}{2}$ et $b + c = 1/2$.

De même $ab + ac + ad = a(b + c + d)$

Le même raisonnement conduit à $a = \frac{1}{2}$ et $b + c + d = \frac{1}{2}$.

Quelques commentaires rapides sur ces deux exercices de l'académie de Montpellier

L'exercice 1 a permis à de nombreux candidats de se lancer et parfois de trouver par une recherche systématique une grande partie des nombres solutions, la rédaction n'était pas évidente et nous n'avons pas eu de solution parfaite, le « quelque soit M » n'a pas été exploité pour trouver une condition nécessaire, les élèves de première ne sont pas habitués à des raisonnements arithmétiques.

L'exercice 3 nous a fourni beaucoup de solutions variées souvent correctes ; contrairement à notre attente peu de mobilisation de la fonction dérivée : peut être à cette période de l'année n'a-t-elle pas encore été

mobilisée sur des recherches d'extrema dans un cadre a priori non fonctionnel . Nous avons été surpris (agréablement) de l'utilisation des fonctions de référence et de la connaissance du programme de seconde sur la parabole, son axe de symétrie, son sommet et de leur utilisation pour résoudre cet exercice.

Les deux exercices nationaux ont été bien réussis ce qui fait que nous avons pu accorder nos prix et accessits à des élèves qui avaient rendu des copies satisfaisantes. J'espère que le niveau des épreuves cette année incitera les candidats à se présenter plus massivement.

Une solution exceptionnelle pour le problème des carrés dans le rectangle : un candidat après avoir classiquement exprimé les longueurs à partir du côté d'un carré judicieusement choisi, a calculé des aires ce qui l'a conduit à une équation du second degré résolue tout à fait proprement et après élimination d'une solution négative l'a conduit au résultat exact après certes quelques lignes de calcul. . .