

LYON

Exercice n° 1

Enoncé

Les sucres

Monsieur Dupont ouvre son sucrier qui contient 70 sucres, tous des parallélépipèdes rectangles de mêmes dimensions (7 mm sur 13 mm sur 25 mm) pour sucrer son café. Pendant qu'il le boit, il s'amuse à aligner les sucres restants en les disposant au hasard suivant la longueur, la largeur ou la hauteur sur sa table. Quand il a fini, il s'aperçoit avec stupéfaction que sa rangée de sucres va d'un bout à l'autre de sa table qui mesure 1,56 m.

- 1) Combien y a-t-il au moins de sucres sur la table ?
- 2) Combien Monsieur Dupont a-t-il mis de sucres dans son café ?

Solution

Soit x, y et z les nombres de sucres respectivement posés sur les côtés 7 mm, 13 mm et 25 mm. On cherche un nombre entier S inférieur ou égal à 70 tel qu'il existe des entiers naturels x, y, z vérifiant

$$\begin{cases} 7x + 13y + 25z = 1560 & (1) \\ x + y + z = S & (2) \\ 0 \leq S \leq 70 \end{cases}$$

1) Le nombre minimal de sucres posés sur la table est obtenu en utilisant le plus possible des sucres posés sur leur grande longueur (25 mm).

Donc $S \geq \frac{1560}{25}$. Or $\frac{1560}{25} = 62,4$, ce qui n'est pas un nombre entier.
Donc $S \geq 63$.

Il y a au moins 63 sucres sur la table.

NB : D'autres réponses pouvaient être admises pour cette question.

2) (2) est équivalent à $z = S - x - y$.

Alors par substitution de z dans (1) : $7x + 13y + 25(S - x - y) = 1560$, ce qui équivaut à $25S = 1560 + 18x + 12y$

ou encore $25S = 6(260 + 3x + 2y)$ (3).

Donc, puisque 25 et 6 n'ont pas de diviseur commun, S est multiple de 6.

Comme $63 \leq S \leq 70$ alors $S = 66$ (4).

L'unique possibilité serait donc d'avoir 4 sucres dans le café. Mais il faut s'assurer qu'il existe au moins un triplet (x, y, z) réalisant cette solution. D'après (3) et (4), $3x + 2y = 15$, ce qui est effectivement réalisé avec $x = 5$ et $y = 0$ par exemple.

Il y a donc 4 sucres dans le café.

Prolongement

$3x + 2y = 15$ équivaut à $3x = 15 - 2y$. Puisque $2y$ est pair, $3x = 15 - 2y$ est impair. Ainsi $3x$ et x sont impairs. Par ailleurs, puisque y est positif ou nul, $3x$ ne dépasse pas 15. Il n'y a donc que 3 valeurs de x possibles : 1, 3 et 5 et **les triplets (x, y, z) sont au nombre de 3 : (1 ; 6 ; 59) ; (3 ; 3 ; 60) et (5 ; 0 ; 61).**

Il n'est pas étonnant de trouver des triplets (x, y, z) différents car 3 sucres posés sur le côté 13 mm peuvent être remplacés par 2 sucres posés sur le côté 7 mm et 1 sucre posé sur le côté 25 mm sans changer la longueur.

Remarque

Il n'était pas nécessaire pour arriver à la solution (4 sucres) d'obtenir les 3 configurations. Elles n'étaient d'ailleurs pas demandées mais il fallait montrer qu'il en existait au moins une laissant 4 sucres dans la tasse. Tout ceci pour dire qu'en trouvant un triplet de façon plus ou moins empirique, les candidats avaient déjà fait un grand pas vers la solution.

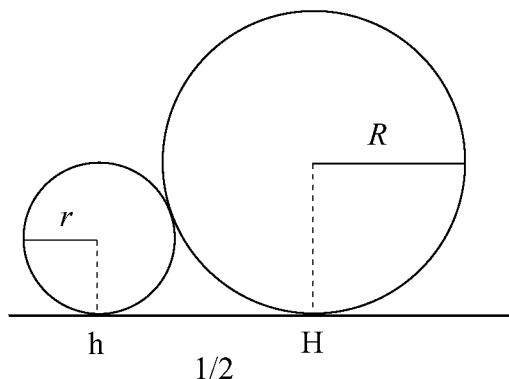
Exercice n° 2

Énoncé

Les pièces de monnaie

1) Deux pièces de monnaie, circulaires, de rayon r et R (que l'on assimilera à des cercles) sont tangentes entre elles et tangentes à une règle

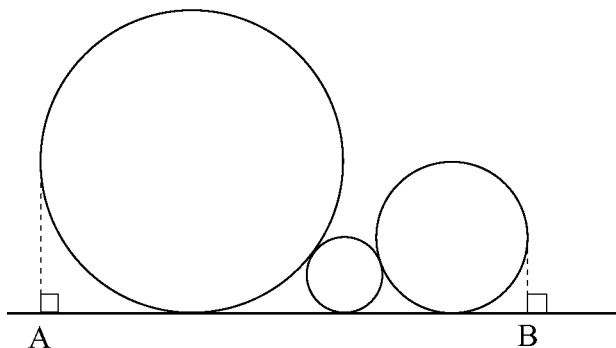
(que l'on assimilera à une droite). Quelle est la distance hH des projetés orthogonaux des centres des cercles sur la droite ?



2) On aligne maintenant sur cette règle trois pièces de rayon 1 cm, 4 cm et x cm ($1 \leq x \leq 4$).

A et B sont les pieds des tangentes aux deux cercles extérieurs et perpendiculaires à la droite comme l'indique le dessin ci-dessous.

Comment disposer ces pièces pour que la distance AB soit la plus petite possible ?



Solution

1) Soit respectivement O et O' les centres des cercles de rayon r et R . Soit P le projeté orthogonal de O sur $(O'H)$. Alors le triangle $OO'P$ est rectangle en P . On a donc : $OO'^2 = OP^2 + PO'^2$ (Théorème de Pythagore).

Ce qui est équivalent successivement à :

$(R+r)^2 = hH^2 + |R-r|^2$ ($OO' = R+r$ car les deux cercles sont tangents extérieurement)

$$hH^2 = 4rR$$

$$hH = 2\sqrt{rR} \text{ (puisque } hH > 0).$$

La distance hH est égale à $2\sqrt{rR}$.

2) Appelons C_1 , C_4 et C_x les cercles de rayon 1, 4 et x .

Plusieurs dispositions sont possibles :

$C_1C_4C_x$ ou $C_xC_4C_1$; dans ce cas la distance AB vaut $d_4(x) = 5 + 4\sqrt{x} + x$

$C_4C_1C_x$ ou $C_xC_1C_4$; dans ce cas la distance AB vaut $d_1(x) = 8 + 2\sqrt{x} + x$

$C_1C_xC_4$ ou $C_4C_xC_1$; dans ce cas la distance AB vaut $d(x) = 5 + 6\sqrt{x}$.

Il s'agit de comparer $d_1(x)$, $d_4(x)$ et $d(x)$ pour x dans l'intervalle $[1; 4]$.

- Comparons $d_4(x)$ et $d(x)$. On étudie le signe de l'expression $d_4(x) - d(x)$.

$d_4(x) - d(x) = x - 2\sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) \leq 0$ pour tout x de $[1; 4]$, car sur cet intervalle $1 \leq \sqrt{x} \leq 2$.

Donc $d_4(x) \leq d(x)$ pour tout x de $[1; 4]$ et C_x **ne doit jamais être placé entre les deux autres cercles**.

- Comparons $d_4(x)$ et $d_1(x)$. On étudie le signe de l'expression $d_4(x) - d_1(x)$.

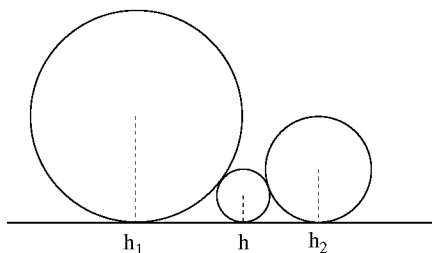
$d_4(x) - d_1(x) \leq 0$ équivaut à : $2x - 3 \leq 0$ c'est-à-dire $\sqrt{x} \leq \frac{3}{2}$ ou

encore $0 \leq x \leq \frac{9}{4}$.

Si $1 \leq x \leq \frac{9}{4}$ alors, $d_4(x) \leq d_1(x)$ et C_4 doit être placé entre les deux autres cercles pour que la distance AB soit minimale.

Si $\frac{9}{4} \leq x \leq 4$ alors, $d_1(x) \leq d_4(x)$ et C_1 doit être placé entre les deux autres cercles pour que la distance AB soit minimale.

Complément



L'égalité $hH = 2\sqrt{rR}$ est une condition nécessaire *et suffisante* pour

que deux cercles de rayons r et R tangents à une même droite et situés dans le même demi-plan limité par cette droite soient tangents extérieurement. Une conséquence intéressante de l'égalité précédente est la suivante : on se donne une droite (D) et trois cercles situés dans un même demi-plan limité par (D), tangents à (D) et tangents extérieurement deux à deux. On note r_1 et r_2 les rayons des deux cercles extérieurs, r le rayon du troisième cercle ainsi que h_1 , h_2 et h les points de contact des cercles avec la droite (D) (h est entre h_1 et h_2). Une relation entre les trois rayons est obtenue très simplement en écrivant $h_1 h_2 = h_1 h + h h_2$ ce qui donne $\sqrt{r} (\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}) = \sqrt{r_1 r_2}$.