

LIMOGES

Exercice n° 1

Énoncé

La cage

Un peintre doit repeindre en fauve les barreaux de la cage circulaire du lion. Il y a 2 005 barreaux et il décide de procéder de la manière suivante :

Il peint un barreau, en passe deux, en peint trois, en passe quatre, etc. jusqu'à ce qu'il rencontre à nouveau le premier barreau peint. Il s'interrompt alors et va prendre sa pause, largement méritée.

Combien de barreaux lui restera-t-il alors à peindre ?

Solution

Pour un élève ayant vu la formule ou sachant la retrouver, presque aucun problème.

Plus généralement, on veut $1 + 2 + 3 + \dots + n \leq 2005$.

En tapotant sur sa calculatrice, en 2 minutes à peine, on trouve qu'il faut aller jusqu'à 62 et qu'on en est alors à 1953 barreaux. Il peint à chaque fois un nombre impair de barreaux, cela signifie que les 62 derniers comptés ne sont pas peints. Il en aura donc peint $1 + 3 + 5 + \dots + 61$. L'élève ingénieux aura vite fait de repérer qu'il obtient la suite des carrés. Plus généralement, en une minute à peine, on arrive facilement à 961.

Il reste alors $2005 - 1953 = 52$ barreaux qui sont à peindre pour atteindre le premier barreau qui, lui, était peint.

Il restera alors à peindre, au total : $2005 - (961 + 52) = 992$ barreaux.

Exercice n° 2

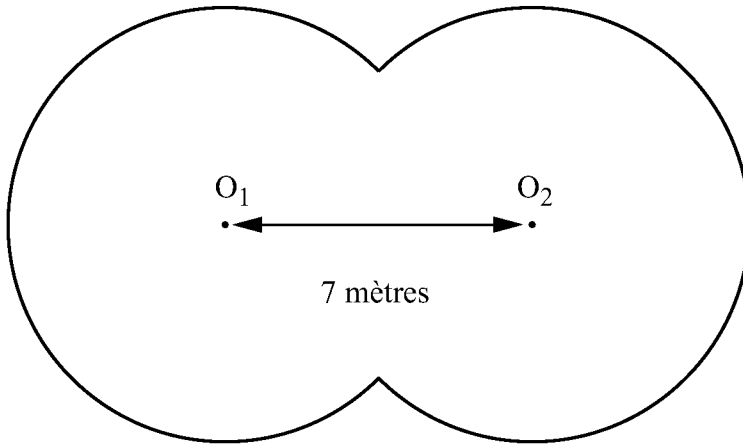
Enoncé

Le bassin

Le bassin de natation des Olympiades 2005 est délimité par 2 cercles, de centres respectifs O_1 et O_2 et de même rayon $r = \frac{O_1O_2}{\sqrt{2}}$.

Quelle est au mètre carré près la superficie couverte par l'eau ?

Pour les olympiades 2006, beaucoup de candidats se jetant dans le grand bain, une superficie de 200 m^2 sera nécessaire. En conservant la même forme de bassin, quelle devra être la distance O_1O_2 au centimètre près ?



Solution

On note I et J les points d'intersection des cercles. O_1IO_2J est un losange car il a 4 côtés de même longueur r .

De plus, l'égalité fournie permet de vérifier que l'angle en I est droit grâce à la réciproque du théorème de Pythagore.

O_1IO_2J est donc un losange avec un angle droit. C'est par conséquent un carré.

Le bassin est donc partitionné en un carré et deux fois $\frac{3}{4}$ de disque,

l'angle rentrant mesurant $360 - 90 = 270^\circ = \frac{3}{4} \times 360$. On a donc une aire totale égale à :

$$A = \left(\frac{O_1O_2}{\sqrt{2}} \right)^2 + 2 \times \frac{3}{4} \times \pi \times \left(\frac{O_1O_2}{\sqrt{2}} \right)^2 \approx 139,95353.$$

L'aire, au mètre carré près près, est donc d'environ 140 m^2 .

Pour le bassin 2006, on veut $A = 200$.

L'équation sera donc

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2 \times \frac{3}{4} \times \pi \times \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 = 200$$

$$\iff \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{200}{1 + 3\pi/2} \iff x \pm \sqrt{\frac{400}{2 + 3\pi}}\sqrt{2}$$

Ne conservant que la valeur positive de x , x représentant la longueur O_1O_2 en mètres, on a, au centimètre près :

$$x = 20\sqrt{\frac{2}{2 + 3\pi}} \approx 8,37.$$

Autre solution possible, conforme au programme de collège : multiplier l'aire de la figure par $\frac{200}{140} = \frac{10}{7}$ revient à avoir multiplié toutes les longueurs par la racine de ce nombre. Donc $O_1O_2 = 7\sqrt{\frac{10}{7}} \approx 8,37$.

La différence entre les deux résultats provient de l'utilisation ici de la valeur approchée 140 au lieu de la valeur exacte, mais le résultat me semble admissible car la démarche est correcte et concise. On pourra simplement valoriser davantage une copie ayant résolu l'équation.