

LILLE

Exercice n° 1

Enoncé

Et s'il n'en reste qu'un ?

L'organisateur d'un jeu décide de désigner le gagnant de la manière suivante :

les candidats, numérotés de 1 à 2005 sont disposés en cercle et rangés dans l'ordre de leur numéro et dans le sens des aiguilles d'une montre. Le jeu commence par le joueur n°1 qui dit « **Gagné** », puis le suivant dit « **Perdu** », et ainsi de suite en alternant les deux réponses. Tout candidat qui dit « **Perdu** » est éliminé et quitte le cercle. Le jeu se poursuit jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un seul joueur qui est le gagnant.

Quel est le numéro de ce gagnant ?

Solution

Si n est le nombre de joueurs le numéro 1 dit toujours « **Gagné** » si et seulement si n est une puissance de 2. Soit N le numéro du gagnant, il y a donc $\frac{N-1}{2}$ candidats éliminés avant d'arriver au numéro N .

On peut considérer que le jeu commence au gagnant avec $2005 - \frac{N-1}{2}$ candidats. Ce nombre est donc une puissance de 2 soit 2^p . Il faut donc chercher p pour résoudre l'équation : $2 \times 2005 - (N-1) = 2^{p+1}$, soit $N = 4010 - 2^{p+1} + 1$.

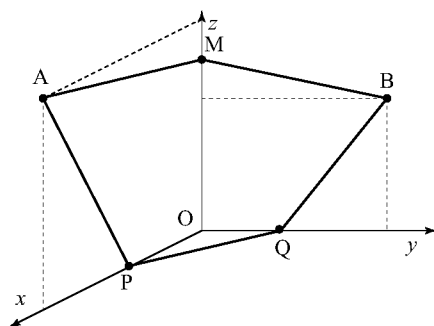
Comme $N \leq 2005$, on obtient $p = 10$, le gagnant porte donc le numéro $N = 1963$.

Exercice n° 2

Enoncé

De A à B par le plus court chemin !

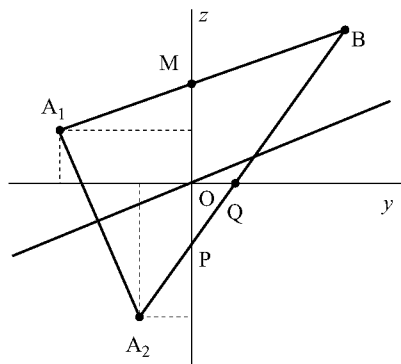
L'espace euclidien est rapporté à un repère orthonormal d'origine O. Soit A le point de coordonnées $(x_A ; 0 ; z_A)$ et B le point de coordonnées $(0 ; y_B ; z_B)$; les nombres x_A, y_B, z_A et z_B sont des réels fixés strictement positifs. Soient les points M de coordonnées $(0 ; 0 ; m)$, P de coordonnées $(p ; 0 ; 0)$ et Q de coordonnées $(0 ; q ; 0)$.



1. Déterminer, en fonction de x_A, y_B, z_A et z_B , le nombre m pour que $AM + MB$ soit minimal.
2. Déterminer, en fonction de x_A, y_B, z_A et z_B , les nombres p et q pour que $AP + PQ + QB$ soit minimal.
3. Dans quels cas ce minimum est-il égal à $AO + OB$?

Solution

On développe la figure comme un cube sur le plan yOz ; dans ce plan les coordonnées d'un point sont (Y, Z) .



1. On conserve la cote du point A ; ce point A devient A_1 . Comme $MA = MA_1$, $AM + MB$ est minimum pour $A_1M + MB$ minimum, c'est à dire que le point M est l'intersection de (A_1B) et de l'axe $z'Oz$, soit M_0 ce point.

Le plan yOz est rapporté à un repère orthonormal d'origine O. Dans ce plan les coordonnées de A_1 sont $(-x_A, z_A)$, celles de B sont (y_B, z_B) . Une équation de la droite (A_1B) , du type $Z = \alpha Y + \beta$ est alors $Z = \frac{z_B - z_A}{y_B + x_A}(Y - y_B) + z_B$ et M_0 est alors défini par $m_0 = \frac{y_B z_A + x_A z_B}{x_A + y_B}$.

2. Le point A devient A_2 dans le quadrant $y'Oz'$, le point P devient P_2 et le point Q ne change pas. $AP + PQ + QB = AP_2 + P_2Q + QB$ est minimum s'il est possible que les quatre points A_2, P_2, Q et B sont alignés, sinon le minimum est obtenu lorsque $P = P_1 = Q = O$. Les coordonnées de A_2 sont $(-z_A, -x_A)$, celles de B sont (y_B, z_B) . Une équation de la droite (A_2B) , du type $Z = \alpha Y + \beta$ est alors $Z = \frac{z_B + x_A}{y_B + z_A}(Y - y_B) + z_B$.

La droite (A_2B) coupe les axes zOz et $y'Oy$ respectivement en P'_0 et Q_0 de coordonnées respectives $\frac{z_A z_B - x_A y_B}{y_B + z_A}$ et $\frac{x_A y_B - z_A z_B}{x_A + z_B}$.

En revenant à l'espace, le point P a pour abscisse $\frac{x_A y_B - z_A z_B}{y_B + z_A}$ et le point Q a pour ordonnée $\frac{x_A y_B - z_A z_B}{x_A + z_B}$. Ces points rendent la somme $AP + PQ + QB$ minimale si et seulement si leurs coordonnées sont positives ou nulles, c'est à dire si et seulement si $x_A y_B - z_A z_B \geq 0$; soit P_0 et Q_0 ces points.

Dans le cas contraire, les points P et Q sont en O.

3. On regroupe les deux figures précédentes. Dans le plan yOz , le point O appartient à la médiatrice de $[A_1A_2]$. Puisque le point A est fixe, il en est de même des points A_1 et A_2 .

- Si le point B est sur Δ , on a $AM_0 + M_0B = AP_0 + P_0Q_0 + Q_0B$.
- Si Δ ne coupe pas le segment $[A_2B]$, on a $AM_0 + M_0B > AP_0 + P_0Q_0 + Q_0B$.
- - Si Δ coupe le segment $[A_2B]$ et si la droite (OA_2) coupe le segment $[A_1B]$, on a $AM_0 + M_0B < AP_0 + P_0Q_0 + Q_0B$.
- Enfin, si la droite (OA_2) ne coupe pas le segment $[A_1B]$, l'inégalité triangulaire $A_1B < A_1O + OB = A_2O + OB$ permet de conclure.