

GUADELOUPE

Exercice n° 1

Enoncé

Les années « pythagoriciennes »

Soit n un entier naturel, on dira que l'année n est « pythagoricienne » si on peut trouver deux années p et q la précédant, telles que les deux conditions suivantes soient remplies

- $n - p = p - q$ (les années sont en progression arithmétique)
- le triangle de côtés n, p, q est un triangle rectangle.

1°) Montrer que les années suivantes sont « pythagoriciennes » :

- a) l'année 5
- b) l'année 800
- c) cette année 2005.

2°) Déterminer toutes les années « pythagoriciennes ».

3°) Quelle sera la prochaine année bissextile et « pythagoricienne » ?

Solution

1°) Etant les mesures des côtés d'un triangle, n, p, q sont non nuls.

a) Pour $n = 5$, il suffit de prendre $p = 4$ et $q = 3$.

b) Si l'année $n = 800$ est « pythagoricienne », il existe p et q vérifiant les équations : $800 - p = p - q$ et $p^2 + q^2 = 800^2$.

La première équation donne $q = 2p - 800$ et par substitution dans la deuxième on obtient : $p^2 + (2p - 800)^2 = 800^2$ qui donne : $5p(p - 640) = 0$.

Comme $p \neq 0$, il vient : $p = 640$ d'où $q = 480$.

On vérifie que $800 - 640 = 160 = 640 - 480$ et $640^2 + 480^2 = 800^2$

- c) De manière analogue, pour l'année 2005, on trouve $p = 1604$ et $q = 1203$ vérifiant : $2005 - 1604 = 1604 - 1203$ et $1604^2 + 1203^2 = 2005^2$.

2°) Détermination de toutes les années « pythagoriciennes ».

Soit n une année « pythagoricienne ».

Il existe p et q entiers tels que : $n - p = p - q$ et $p^2 + q^2 = n^2$.

Posons $r = n - p = p - q$. ($r > 0$)

On a : $n = p + r$ et $q = p - r$

et $p^2 + q^2 = n^2$ s'écrit : $p^2 + (p - r)^2 = (p + r)^2$.

Après développement et simplification on obtient : $p(p - 4r) = 0$

comme $p \neq 0$, il vient : $p = 4r$

et par conséquent : $n = 5r$ et $q = 3r$.

Si n est une année « pythagoricienne », alors n est un multiple de 5.

Réciproquement, toute année de la forme $n = 5r$, avec r entier naturel non nul, est bien une année « pythagoricienne ». Il suffit de prendre $p = 4r$ et $q = 3r$.

3°) Détermination de la prochaine année bissextile et « pythagoricienne ».

Une année bissextile est un multiple de 4 entre 2000 et 2100.

L'année 2004 était une année bissextile, la prochaine année bissextile et « pythagoricienne » sera donc le plus petit commun multiple de 4 et de 5, suivant 2004, c'est-à-dire 2020.

Exercice 2

Enoncé

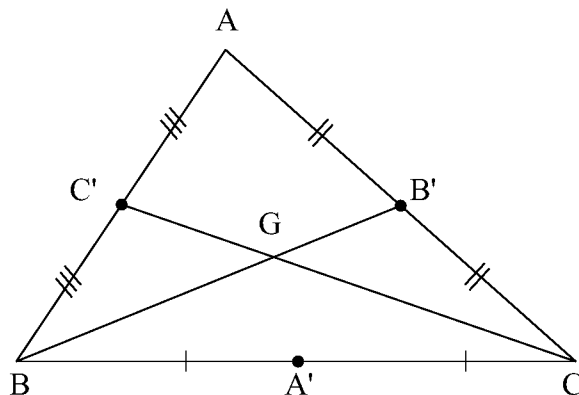
Les médianes égales

Les nombres entiers a, b, c , ($a \leq b \leq c$), désignent les mesures des côtés d'un triangle de périmètre 15, ayant deux médianes égales.

Quelles sont les valeurs de a, b et c ?

Solution

Soit ABC un triangle admettant deux médianes égales. A' , B' , C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. G le centre de gravité du triangle ABC . On peut supposer $BB' = CC'$.



On a : $BG = \frac{2}{3}BB' = \frac{2}{3}CC' = CG$ Le triangle BGC est un triangle isocèle de sommet principal G et la médiane (GA') est aussi médiatrice de $[BC]$. (GA') est aussi la médiane du triangle ABC relative au côté $[BC]$. Le triangle ABC est un triangle isocèle.

ABC étant un triangle et $a \leq b \leq c$, les nombres a, b, c vérifient l'inégalité triangulaire $c \leq a + b$.

Etant de périmètre 15 : $a + b + c = 15$.

Les triplets de nombres possibles sont : $(1, 7, 7)$; $(3, 6, 6)$; $(4, 4, 7)$; $(5, 5, 5)$.