

DIJON

Exercice n° 1

Enoncé

Les aiguilles

Lorsqu'on observe les deux aiguilles d'une horloge, on constate qu'elles occupent au fil des heures, l'une par rapport à l'autre, des positions particulières. On se propose, dans cet exercice, d'étudier deux exemples de telles situations.

- 1) A minuit (0 heure) les deux aiguilles sont superposées. A quelle heure cette superposition se produira-t-elle de nouveau :
 - a) Pour la première fois ?
 - b) Pour la seconde fois ?
 - c) Pour la k -ème fois. (k désigne un entier compris entre 1 et 11).
 Les réponses aux questions a) et b) seront arrondies à la seconde.
- 2) Lorsqu'il est environ 10h 10' et que la bissectrice de l'angle formé par les deux aiguilles passe par la graduation « 12 », quelle heure est-il ? (La réponse sera arrondie à la seconde).

Solution

1°) a) Lorsque la grande aiguille « *avance* » d'un angle de θ degrés, la petite aiguille « *avance* » d'un angle de $\frac{\theta}{12}$ degrés. La première superposition aura donc lieu lorsque $\frac{\theta}{12} + 360 = \theta$. On obtient $\theta = \frac{12}{11} \times 360$. Les deux aiguilles sont donc superposées lorsque l'écart angulaire avec la verticale est de $\frac{360}{11}$ de degrés. Or en 10 secondes, la grande aiguille « *avance* » de 1 degré et l'écart trouvé correspond à $\frac{3600}{11}$ secondes soit 5 min 27 sec. Il est donc 1 h 5 min 27 sec.

b) Pour la seconde coïncidence, il suffit d'écrire $\frac{\theta}{12} + 720 = \theta$, on trouve $t_2 \approx 2$ h 10 min 55 sec.

c) Plus généralement, l'équation $\frac{\theta}{12} + 3 \times 360 = \theta$ conduit à $\theta = 360 \times \frac{12k}{11}$, l'écart avec la verticale est donc de $\frac{360k}{11}$ degrés ce qui permet de trouver toutes les coïncidences entre minuit et midi :

$t_3 \approx 3$ h 16 min 22 sec, $t_4 \approx 4$ h 21 min 49 sec, $t_5 \approx 5$ h 27 min 16 sec, $t_6 \approx 6$ h 32 min 44 sec, $t_7 \approx 7$ h 38 min 11 sec, $t_8 \approx 8$ h 43 min 38 sec, $t_9 \approx 9$ h 49 min 05 sec, $t_{10} \approx 10$ h 54 min 33 sec, $t_{11} = 12$ h.

2°) A 10 h, l'angle aigu formé par les deux aiguilles mesure 60° . On cherche donc θ , tel que $60 - \frac{\theta}{12} = \theta$ soit $\theta = \frac{720}{13}$ degré soit un temps de $\frac{2}{13}$ h, soit environ 9 min 14 sec.

Dans cette configuration il est environ 10 h 9 min 14 sec.

Exercice n° 2

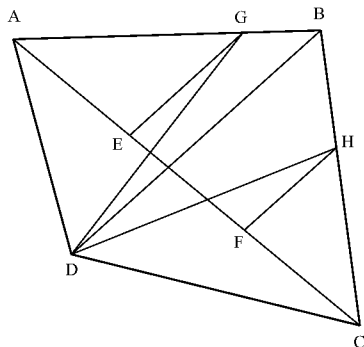
Enoncé

Partages

A la question : « comment diviser un quadrilatère ABCD en trois parties de même aire, en traçant deux droites passant par D ? », Samuel Marolois (1616) propose la réponse suivante :

« On place E au tiers de la diagonale [AC] et F aux deux tiers de cette même diagonale. La parallèle à (BD) passant par E coupe [AB] en G et la parallèle à [BD] passant par F coupe [BC] en H. Les deux droites cherchées sont (DG) et (DH) ».

On se propose de vérifier cette affirmation dans le contexte de la figure ci-dessous



- 1) Démontrer que les quadrilatères DABE, DEBF et DFBC ont la même aire.
- 2) En déduire que DAG, DHC et DGBH sont des polygones de même aire.

Solution

1°) Les triangles BAE, BEF, BFC d'une part et les triangles DAE, DEF, DFC d'autre part ont même hauteur et des bases de même mesure, ils ont donc la même aire. Les quadrilatères cités ont donc également la même aire.

2°) Puisque (HF) et (BD) sont parallèles, F et H sont équidistants de la droite (BD). Les triangles BFH et DFH, qui ont en commun le côté [HF] ont donc la même aire. L'aire du quadrilatère DCBF est la somme des aires des triangles DFC, FCH et FHB ; c'est donc aussi la somme des aires des triangles DFC, FCH et DFH.

Le quadrilatère DCBF et le triangle DHC ont la même aire égale d'après la question 1°) au tiers de l'aire de ABCD. Le même raisonnement permet d'affirmer que l'aire du quadrilatère ADEB est la même que celle du triangle DGA et donc de conclure.

Remarque : La question posée se résout bien dans le contexte de la figure donnée en annexe, le raisonnement général est plus délicat car il existe des configurations pour lesquelles les points G et H n'appartiennent plus aux segments [AB] et [BC], il faut alors faire la construction avec la seconde diagonale du quadrilatère. Le cas où le quadrilatère est un parallélogramme est un cas particulier intéressant.