

CORSE

Exercice n° 1

(A traiter par tous les candidats)

Enoncé

Un placement

J'avais décidé de faire des économies et, pour cela, j'avais prévu de déposer chaque mois 100 € sur un compte en banque, le capital déposé étant rémunéré chaque mois à un taux mensuel de 0,4152%.

J'avais décidé de faire 120 dépôts et de récupérer mes économies 120 mois après mon premier versement. Malheureusement, des difficultés financières ne m'ont pas permis des économies constantes et, pendant 15 mois consécutifs, je n'ai rien versé sur mon compte. Pour tous les autres mois, le versement a toujours été de 100 €. Au bout de 120 mois de placement, cela a représenté une perte d'environ 2 005 €, par rapport au plan que j'avais initialement prévu.

1. Quel capital aurais-je dû récupérer au bout de 120 mois si je n'avais pas eu de difficultés financières ?
2. Déterminer quels sont les mois pendant lesquels je n'ai pas versé les 100 €.

Formulaire : pour tout réel q ($q \neq 1$), on a $q + q^2 + \dots + q^n = q \frac{1 - q^n}{1 - q}$

Solution proposée par l'équipe académique

1. Le premier versement est placé 120 mois à 0,4152%. Au bout de 120 mois de placement, il permettra de retirer $100 \times 1,004\,152^{120}$ euros. Le second versement est placé 119 mois, il permettra de retirer $100 \times 1,004\,152^{119}$ euros... le 120^{ème} versement est placé 1 mois ; il permettra de retirer $100 \times 1,004\,152^1$ €

Le capital total retiré au bout de 120 mois sera

$$\begin{aligned}
 & 100 \times 1,004\,152^{120} + 100 \times 1,004\,152^{119} + \dots + 100 \times 1,004\,152^1 \\
 &= 100,4152 \times (1 + 1,004\,152 + 1,004\,152^2 + \dots + 1,004\,152^{119}) \\
 &= 100,4152 \times \frac{1,004\,152^{120} - 1}{0,004\,152} \approx 15\,578,03
 \end{aligned}$$

Soit n le nombre des premiers versements consécutifs. Il y a 15 mois sans versement, les mois de rangs $n+1$ à $n+15$. La perte est donc égale à :

$$\begin{aligned}
 & 100 \times 1,004\,152^{120-(n+1)+1} + 100 \times 1,004\,152^{120-(n+2)+1} + \dots \\
 &+ 100 \times 1,004\,152^{120-(n+15)+1}, \\
 &= 100 \times 1,004\,152^{120-n} + 100 \times 1,004\,152^{120-n-1} + \dots \\
 &+ 100 \times 1,004\,152^{120-n-14} \\
 &= 100 \times 1,004\,152^{120-n-14} (1 + 1,004\,152 + \dots + 1,004\,152^{14}) \\
 &= 100 \times 1,004\,152^{106-n} \frac{1,004\,152^{15} - 1}{0,004\,152} \\
 &\approx 2\,396,07 \times 1,004\,152^{-n}.
 \end{aligned}$$

Nous cherchons donc l'entier naturel n tel que

$$2\,396,07 \times 1,004\,152^{-n} = 2005 \Leftrightarrow 1,004\,152^n = \frac{2\,396,07}{2005} = 1,195\,037$$

La calculatrice donne $n = 43$. Les versements n'ont donc pas été effectués du 44^{ème} au 58^{ème} mois.

Solution (avec une calculatrice)

par A. Guillemot

a) Si on place 100 euros pendant n mois, on récupère à la fin un capital de

$$100 * 1,04152^n \text{ €}.$$

Le premier versement permet de recevoir un capital de :

$$100 * 1,04152^{120} \text{ €}.$$

Le deuxième versement permet de recevoir un capital de :

$$100 * 1,04152^{119} \text{ €}.$$

Le troisième versement permet de recevoir un capital de :

$$100 * 1,04152^{118} \text{ €}.$$

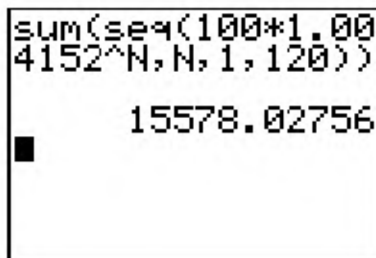
et ainsi de suite jusqu'au dernier versement qui permet de recevoir un capital de :

$$100 * 1,04152^1 \text{ €}.$$

Pour avoir le capital total disponible, il suffit de faire la somme de tous

les $100 * 1,04152^n$ pour n variant de 1 à 120. Pour cela on utilise les fonctions **sum** et **seq** de la calculatrice de la manière suivante :

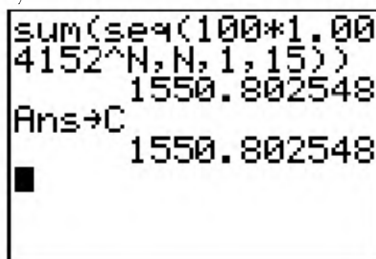
$$\text{sum}(\text{seq}(100 * 1.004152^N, N, 1, 120))$$



```
sum(seq(100*1.00
4152^N,N,1,120))
15578.02756
```

Il en résulte que le capital espéré au bout de 120 mois était de 15 578 €.

b) Quinze versements permettent d'obtenir au bout du quinzième mois un capital C de 1 550,8 €.



```
sum(seq(100*1.00
4152^N,N,1,15))
1550.802548
Ans→C
1550.802548
```

Le problème consiste à trouver le nombre X de mois nécessaire au capital C pour obtenir un capital de 2005 euros, ce qui revient à résoudre l'équation :

$$C * 1,004152^X = 2005 \text{ avec } X \text{ entier.}$$

Considérons la fonction $Y1 = C * 1,004152^X$, c'est une fonction croissante. Commençons par voir sa table de valeurs pour X variant de 10 en 10.



```
2005 Plot2 Plot3
Y1=C*1.004152^X
Y2=
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=
```

X	Y1	
10	1616.4	
20	1684.8	
30	1756.1	
40	1830.4	
50	1907.8	
60	1988.5	
70	2072.6	
X=10		

Cette première table nous permet de voir que la solution est comprise entre 60 et 70. Faisons varier X de 1 en 1 à partir de 60.

X	Y ₁	
60	1988.5	
61	1996.7	
62	2005	
63	2013.4	
64	2021.7	
65	2030.1	
66	2038.5	
X=60		

La calculatrice nous donne 62 comme solution.

Il faut donc laisser le capital C pendant 62 mois pour obtenir un capital de 2005 euros. Rien n'a été versé du quarante quatrième au cinquante huitième mois.

Exercice n° 2

(A traiter par les candidats des séries L, ES et STT)

Enoncé

La moyenne

1. Un élève veut calculer sa moyenne annuelle. Il a eu deux notes égales à 15, douze notes égales à 8 et 7 autres notes entre 7 et 14. La moyenne des notes entre 7 et 14 est 12. Déterminer sa moyenne annuelle.
2. Un autre élève a eu, lui aussi, 15 pour note maximale et 8 pour note minimale. Sa moyenne annuelle est 10. S'il fait la moyenne des notes autres que 15 et 8, il trouve 12. Démontrer qu'il a au moins deux notes égales à 15 et au moins six notes égales à 8.

Solution proposée par l'équipe académique

1. La somme des notes entre 7 et 14 est égale à $12 \times 7 = 84$. La moyenne de l'ensemble des notes est donc

$$\frac{2 \times 15 + 12 \times 8 + 84}{2 + 12 + 7} = 10$$

2. Soit n le nombre de notes autres que 15 et 8, leur somme est $12n$. Soit q le nombre de 15 et h le nombre de 8. La moyenne annuelle est 10. Donc
$$\frac{15q + 8h + 12n}{q + h + n} = 10.$$

Soit $15q + 8h + 12n = 10(q + h + n) \Leftrightarrow 5q - 2h + 2n = 0$.

Cela impose $5q = 2(h - n)$ et q doit donc être un entier naturel pair. La note maximale étant 15, q est non nul, donc $q \geq 2$.

On en déduit $5q \geq 10$ donc $2(h - n) \geq 10 \Rightarrow h - n \geq 5 \Rightarrow n + 5 \geq 6$ donc $h > 6$.

Exercice n° 3

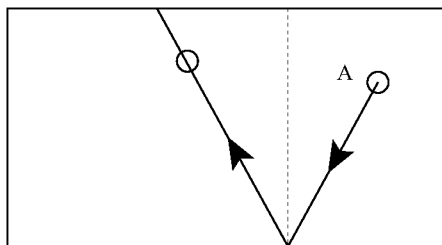
(A traiter par les candidats de la série S)

Enoncé

Le billard

Un billard est constitué d'un plateau rectangulaire de longueur L et de largeur l . La boule de billard, qui se trouve en un point A du billard, suit, après avoir été frappée, une trajectoire en ricochant sur les bords du plateau. On dira que la trajectoire est « parfaite » si la boule revient à son point de départ en suivant un quadrilatère dont les sommets sont des points situés sur les bords du plateau.

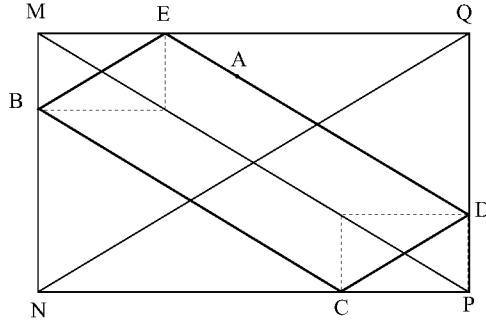
Dans cette question, on considère que le joueur n'a pas donné à la boule d'effet spécial et que le rebond sur chaque bord du plateau se fait symétriquement à la perpendiculaire au point de contact, comme indiqué sur la figure suivante.



- Démontrer qu'une trajectoire parfaite est nécessairement un parallélogramme.
- Pour tout point A non situé au centre ou sur un bord du plateau, déterminer en le justifiant, le nombre de trajectoires parfaites passant par A.
- Démontrer que toutes les trajectoires parfaites ont la même longueur.

Solution

a) La boule décrit un quadrilatère BCDE



Posons $\widehat{AEB} = 2\alpha$ alors : $\widehat{DEQ} = \widehat{BEM} = \frac{\pi}{2} - \alpha$ donc $\widehat{QDE} = \widehat{EBM} = \alpha$ et $\widehat{EBM} = \widehat{NBC}$ donc $\widehat{QDE} = \widehat{NBC}$.

Ainsi les droites (MN) et (QP) étant parallèles, (EB) et (DC) le sont aussi. De même, (BC) et (ED) sont aussi parallèles.

Une rédaction plus précise avec les angles de vecteurs.

Sachant que $(\vec{EB}, \vec{ED}) = 2\alpha$,
 $(\vec{ED}, \vec{EQ}) = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $(\vec{DQ}, \vec{DE}) = (\vec{DC}, \vec{DP}) = \alpha$,
 $(\vec{ME}, \vec{MB}) = (\vec{BN}, \vec{BC}) = \alpha$.

Donc $(\vec{BC}, \vec{ED}) = (\vec{BC}, \vec{BN}) + (\vec{BN}, \vec{DQ}) + (\vec{DQ}, \vec{ED})$
 $= (\vec{BC}, \vec{MN}) + (\vec{PQ}, \vec{ED}) = -\alpha + \alpha = 0$

ce qui montre que les vecteurs $\vec{BC}$ et $\vec{ED}$ sont colinéaires et donc les droites (BC) et (ED) parallèles. De même on démontre que (EB) et (CD) le sont.

Ainsi le quadrilatère BCDE, ayant des côtés opposés parallèles deux à deux, est un parallélogramme.

b) Démontrons que les côtés de ce parallélogramme sont parallèles aux diagonales du plateau MNPQ.

Observons que, pour des raisons d'angle, les triangles rectangles MBE, NBC, PDC et QDE sont semblables.

BCDE étant un parallélogramme, l'égalité des longueurs des côtés opposés montre que MBA et PDC sont isométriques et que NBC et QDA le sont aussi.

Posons $MB = a$ et $BN = b$ puis $ME = c$ et $EQ = d$. La proportionnalité des côtés donne : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Posons $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$. Alors $a = k.b$, $c = k.d$,

$$\text{donc } \frac{MB}{MN} = \frac{a}{a+b} = \frac{k.b}{k.b+b} = \frac{k}{k+1}$$

$$\text{et } \frac{ME}{MQ} = \frac{c}{c+d} = \frac{k.d}{k.d+d} = \frac{k}{k+1}.$$

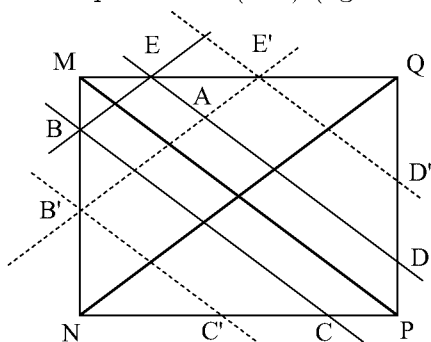
La réciproque du théorème de Thalès montre alors que les droites (EB) et (QN) sont parallèles et les triangles MBE et MNQ sont semblables. Les triangles MBE et QPM le sont donc aussi. Or MBE et QDE le sont, donc QDE et QPM le sont. La réciproque du théorème de Thalès montre alors que les droites (AD) et (MP) sont parallèles.

Nous avons donc bien démontré que le parallélogramme BCDE a des côtés parallèles aux diagonales du plateau MNPQ.

Le point A étant donné, nous cherchons s'il existe des parallélogrammes aux côtés parallèles aux diagonales passant par A.

- Si A n'est sur aucune diagonale du plateau, nécessairement le côté d'un tel parallélogramme passant par A est parallèle à l'une des diagonales. Il existe donc au plus deux trajectoires passant par A.

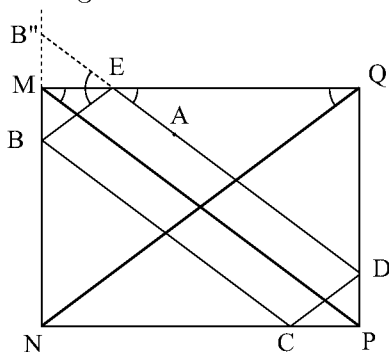
Traçons par exemple une parallèle à (MP) (figure ci-dessous)



On obtient un point d'intersection avec un bord. On trace à partir de ce point une parallèle à l'autre diagonale, qui détermine une seconde intersection. Puis enfin, à partir de ce dernier point, de nouveau une

parallèle à (MP) , qui recoupe un troisième côté. Le théorème de Thalès permet de démontrer immédiatement que le quadrilatère obtenu est un parallélogramme.

Réciproquement (figure ci-dessous) un parallélogramme dont les côtés sont parallèles aux diagonales de $MNPQ$ est bien une trajectoire possible, les bissectrices de ses angles étant parallèles aux côtés, comme le montre l'égalité des angles de la figure.



- Si A est sur une diagonale et différent du centre, alors il n'existe qu'une trajectoire parfaite passant par A .
- c) Soit B'' l'image de B par la symétrie orthogonale d'axe (MQ) . $\widehat{MEB} = \widehat{B''EM} = \widehat{DEQ}$ donc B'' , E et D sont alignés et le quadrilatère $B''DPM$ est un parallélogramme. On en déduit que $B''D = MP$. Or $B''D$ n'est autre que le demi-périmètre du quadrilatère $BCDE$.

En conclusion, toutes les trajectoires parfaites ont pour longueur le double de la diagonale du billard $MNPQ$.

Solution (approche Cabri)

par A.Guillemot

Soit $EFGH$ un rectangle représentant le plateau de billard, A un point quelconque du billard et M un point quelconque de $[EF]$.

Si la droite (MA) coupe $[FG]$ en N .

On construit le parcours de la boule de la manière suivante : (NP) est la symétrique de (MN) par rapport à la perpendiculaire en N à (FG) . (PQ) est la symétrique de (NP) par rapport à la perpendiculaire en P à (HG) . $(M'Q)$ est la symétrique de (PQ) par rapport à la perpendiculaire en Q à (EH) .

Le parcours de la boule sera la ligne brisée $ANPQM'$.

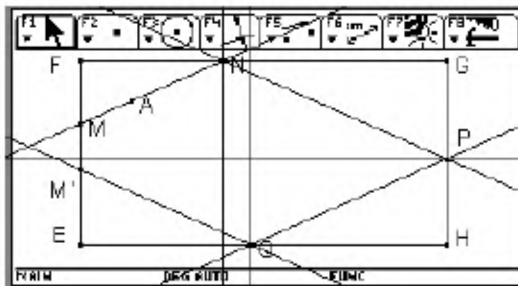


fig.1

Déplaçons M sur $[EF]$ pour voir si M et M' peuvent être confondus, ce qui permettra de dire que la trajectoire est parfaite.

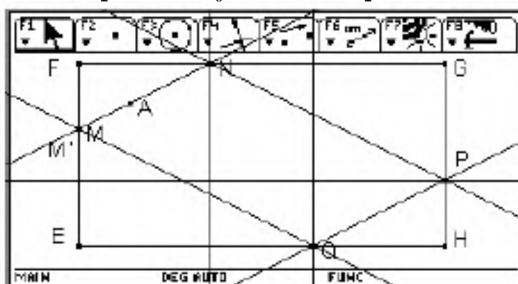


fig.2

D'après notre manipulation, il existe une solution.

Si la droite (MA) coupe $[EH]$ en N .

On construit le parcours de la boule de la même manière et on obtient encore une seule trajectoire parfaite.

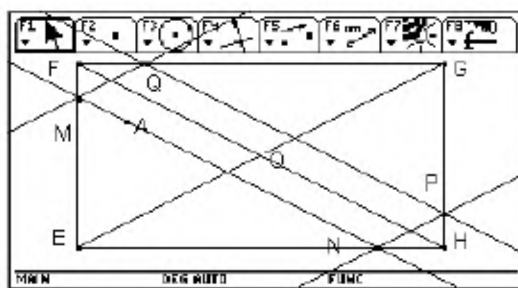


fig.3

En examinant ces deux trajectoires parfaites, il semble que ce soient des parallélogrammes et que leurs côtés soient parallèles aux diagonales du rectangle.

Démonstration.

a) En utilisant les notations de la figure 1, (NP) est l'image de (MN) dans une symétrie d'axe d_1 et (QP) est l'image de (NP) dans une symétrie d'axe d_2 . Comme d_1 et d_2 sont perpendiculaires, la composée de ces deux symétries est une symétrie centrale, donc les droites (MN) et (PQ) sont parallèles.

De la même manière, (NP) et (QM') sont parallèles. Donc si $M=M'$, la trajectoire parfaite sera un parallélogramme.

Si on mène une parallèle à (EF) passant par le milieu de [FG], d'après le théorème de Thalès, elle passe par le milieu de [MP].

Si on mène une parallèle à (GF) passant par le milieu de [FE], d'après le théorème de Thalès, elle passe par le milieu de [NQ].

Comme [MP] et (NQ) ont même milieu, ce point est confondu avec le centre du billard.

b) Montrons qu'une condition nécessaire et suffisante pour avoir une trajectoire parfaite est que les côtés de la « trajectoire » soient parallèles aux diagonales du billard.

Condition nécessaire.

Soit ANP le début de la trajectoire de la boule, P' le point d'intersection de (AN) et de (GH).

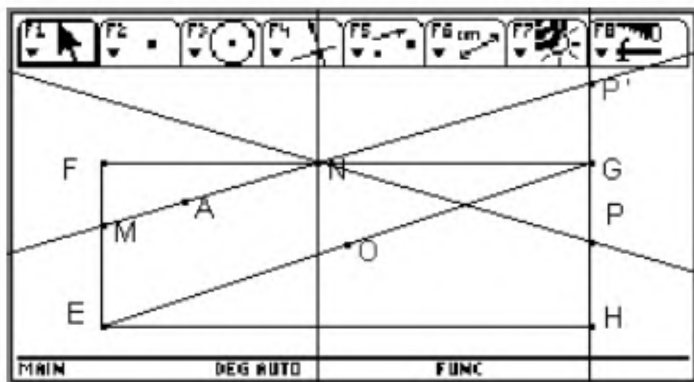


fig.4

Pour avoir une trajectoire parfaite, il est nécessaire que $MNPQ$ soit un parallélogramme de centre O , donc il est nécessaire que O soit le milieu de $[MP]$.

Comme O est le milieu de $[EG]$, il est nécessaire que MGPE soit un

parallélogramme, donc que Comme les vecteurs $\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{GP'}$, il est nécessaire que EMP'G soit un parallélogramme, donc que (AN) soit parallèle à (EG). De la même manière, il est nécessaire que (NP) soit parallèle à (FH).

Condition suffisante.

Soit (AM) parallèle à (EH) et (NP) parallèle à (FG)

On a donc $\widehat{ANF} = \widehat{OGF}$ de même que $\widehat{PNG} = \widehat{OFG}$.

Comme OFG est un triangle isocèle de sommet O, on a l'angle $\widehat{OFG} = \widehat{OGF}$ donc $\widehat{ANF} = \widehat{PNG}$.

En faisant de la même manière pour les trois autres points, on a bien une trajectoire parfaite.

Comme il y a deux façons de construire un parallélogramme avec ses côtés parallèles aux diagonales du billard, on peut dire qu'il y a deux trajectoires parfaites dans le billard.

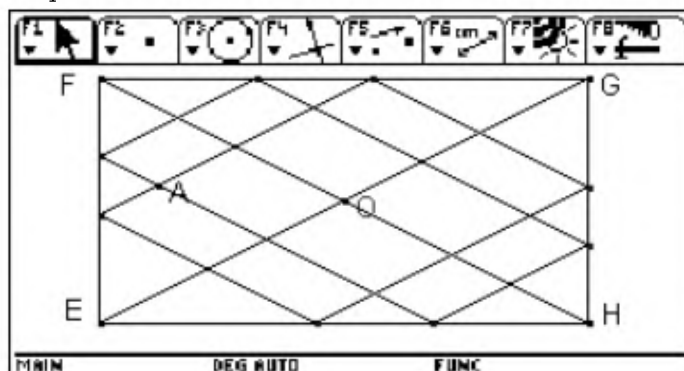


fig.5

c) En s'appuyant sur la figure 4, on a $NP = NP'$, Comme dans une trajectoire parfaite, MP'GE est un parallélogramme, on a $MP' = EG$. donc $MN + NP = MN + NP' = EG$.

Donc la longueur d'une trajectoire parfaite est égale au double d'une diagonale du billard.