

CLERMONT-FERRAND

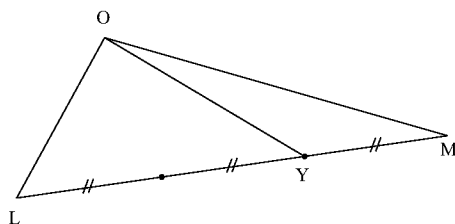
Exercice n° 1

Enoncé

Un exercice où l'on ne manque pas d'aire !

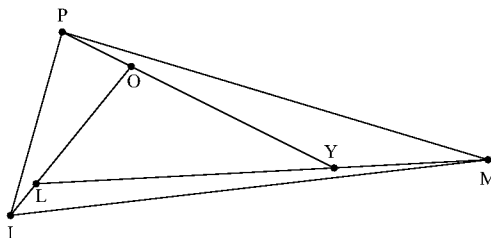
Toutes les réponses doivent être justifiées.

Question 1 : Sur la figure codée ci-dessous, les points L, Y et M sont alignés. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? « L'aire du triangle OLY est le double de celle du triangle OYM ».



Question 2 : Sur la figure ci-dessous, les points O, L, I sont alignés ainsi que les points P, O, Y et L, Y, M. De plus : $YM = \frac{1}{2}LY$, $PO = \frac{1}{3}OY$ et $LI = \frac{1}{4}OL$.

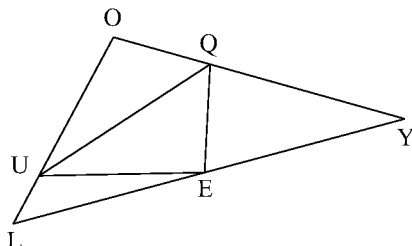
On sait que l'aire du triangle OLY est 24 cm^2 (la figure n'est pas à l'échelle).



L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? « L'aire du triangle PIM est un nombre entier ».

Question 3 : Sur la figure ci-dessous, les points O, L, U sont alignés ainsi que les points Q, O, Y et L, Y, E. De plus : $YE = \frac{1}{2}LY$, $QO = \frac{1}{3}OY$ et $LU = \frac{1}{4}OL$.

On sait que l'aire du triangle OLY est 24 cm^2 (la figure n'est pas à l'échelle).



L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? « L'aire du triangle QUE est un nombre entier ».

Solution

Question 1

Question 1 : Les triangles OLY et OYM ont une hauteur commune issue de O et la base LY de OLY est le double de celle YM de OYM. Donc l'affirmation est vraie.

Question 2

$$\text{aire (OYM)} = \frac{1}{2} \text{ aire (OLY)} = 12; \text{ aire (POM)} = \frac{1}{3} \text{ aire (OYM)} = 4;$$

$$\text{aire (POL)} = \frac{1}{3} \text{ aire (OLY)} = 8$$

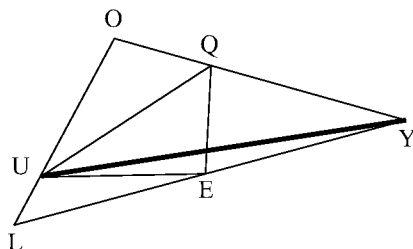
$$\text{aire (PLI)} = \frac{1}{4} \text{ aire (POL)} = 2; \text{ aire (YLI)} = \frac{1}{4} \text{ aire (OLY)} = 6;$$

$$\text{aire (IYM)} = \frac{1}{2} \text{ aire (YLI)} = 3.$$

Par addition, l'aire du triangle PIM est

$$24 + 12 + 4 + 8 + 2 + 6 + 3 = 59.$$

C'est un nombre entier !

Question 3

$\text{aire (ULY)} = \frac{1}{4} \text{ aire (OLY)} = 6$ donc $\text{aire (ULE)} = \frac{1}{2} \text{ aire (ULY)} = 3$
 $\text{aire (OEY)} = \frac{1}{2} \text{ aire (OLY)} = 12$ donc $\text{aire (QEY)} = \frac{2}{3} \text{ aire (OEY)} = 8$
 $\text{aire (OQL)} = \frac{1}{3} \text{ aire (OLY)} = 8$ donc $\text{aire (OUQ)} = \frac{3}{4} \text{ aire (OQL)} = 6$.
 Par soustraction, $\text{aire (QUE)} = 24 - 3 - 8 - 6 = 7$.

C'est un nombre entier !

(*Inspiré d'une compétition australienne*).

Exercice n° 2**Enoncé****2005 points**

- 1) 2005 points sont donnés à l'intérieur ou sur les côtés d'un carré ABCD. La longueur d'un côté du carré est 14 cm. Montrer qu'il existe un carré de côté 7 cm contenant, à l'intérieur ou sur ses côtés, au moins 502 points.
- 2) a) On partage le carré ABCD en 100 carrés égaux ; montrer que la diagonale de chacun de ces carrés a une longueur inférieure à 2.
 b) Montrer qu'il existe un disque de rayon 1 cm contenant au moins 21 points.
- 3) Les 2005 points sont choisis à l'intérieur d'un cube d'arête 10 cm. Montrer qu'il existe une sphère de rayon 1 cm contenant au moins 3 de ces points.

Solution

- 1) Les médiatrices des côtés du carré ABCD définissent 4 carrés de côté 7 cm.

L'un de ces carrés a au moins 502 points : si chacun en avait au plus 501 le nombre de points obtenu serait inférieur ou égal à 2004.

- 2) a) Chaque carré a pour côté 1,4 , or $1,4 < \sqrt{2}$.

La diagonale a une longueur égale à $1,4 \times \sqrt{2}$ et donc inférieure à 2.

b) Un des petits carrés a au moins 21 points : sinon chaque carré a au plus 20 points ; le nombre total de points serait inférieur ou égal à $20 \times 100 = 2000 < 2005$.

Ce carré ayant une diagonale de longueur inférieure à 2 est inscrit dans un cercle de rayon 1.

- 3) On partage le cube en $10^3 = 1000$ petits cubes de côté 1 cm ; la diagonale pour chacun est $\sqrt{3} < 2$.

Si chacun de ces cubes contenait au plus 2 points, il y en aurait un maximum de 2000 ; il en existe donc un qui contient au moins 3 points d'où l'existence de la sphère.