

CAEN

Exercice n° 1

Enoncé

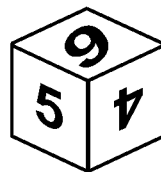
Les dés

On dispose de dés cubiques portant sur leurs faces les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, tous identiques à celui du dessin ci-dessous. On rappelle que les dés sont construits de telle sorte que deux faces opposées portent des nombres dont la somme est égale à 7.



Attention : le dé ci-contre à gauche n'est pas identique au précédent et ne pourra pas être utilisé dans l'exercice.

En revanche, pour la facilité du dessin, l'orientation des chiffres sur les faces est sans importance; le dé ci-contre à droite sera considéré comme identique au premier.

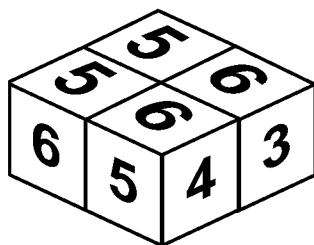


On fabrique des assemblages de dés en les accolant face contre face et en respectant toujours la règle suivante : « *Lorsque deux dés sont accolés, les faces de contact entre les deux dés portent toujours le même nombre.* »

Dans cet exercice, des dessins soigneusement réalisés pourront être considérés comme une justification suffisante.

1°) Peut-on réaliser une configuration de quatre dés, posés sur une table, accolés en carré, et portant chacun le nombre 6 sur sa face supérieure ?

2°) a) Montrer que la configuration de quatre dés posés sur une table présentée ci-dessous est réalisable. Quelle est la somme des nombres portés par les faces visibles des quatre dés ? (Il s'agit de toutes les faces visibles et non pas seulement des faces visibles sur le dessin ci-dessous).



b) Montrer qu'on ne peut pas accoler en carré quatre dés posés sur une table de telle sorte que les faces visibles ne portent que les nombres 4, 5 et 6.

c) En déduire la somme maximum des nombres portés par les faces visibles de quatre dés posés sur une table et accolés en carré.

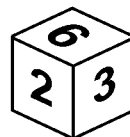
d) Avec 8 dés accolés, on forme un cube. Déduire de la question précédente la somme maximum des nombres apparaissant sur les 6 faces du cube.

Solution

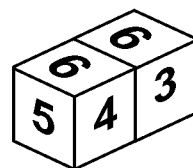
1°) Considérons un dé posé comme le premier du texte. Sur la face opposée au 5, il porte un 2.



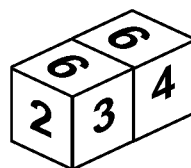
Un deuxième dé, accolé au premier par cette face portant un 2 et ayant un 6 sur la face supérieure, portera un 3 sur la face adjacente à celle du 4 du premier dé.



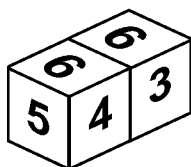
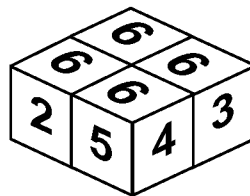
La face opposée au 5 dans cette paire de dés sera opposée sur le deuxième dé à sa face portant un 2 et portera donc aussi un 5 (cette propriété peut d'ailleurs être généralisée : deux faces opposées d'une paire de dés portent le même nombre).



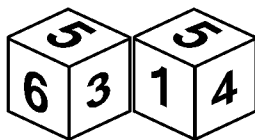
On construit une deuxième paire en permutant les deux dés de façon à accoler leurs faces portant des 5 sans changer leurs orientations. On obtient la paire de dés ci-contre qui peut être accolée, par les faces portant les nombres 3 et 4, à la précédente pour obtenir le carré ci-dessous.



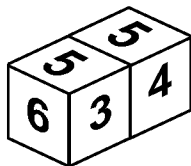
Les quatre faces supérieures portent des 6 et la somme maximale des nombres sur ces faces est donc 24.



2°) a) On reprend la première paire de dés fabriquée au 1°.



On accole ensuite par leurs faces portant des 1 deux dés portant des 5 sur leurs faces supérieures.



On obtient alors la paire ci-contre qui peut être accolée, par les faces portant les nombres 3 et 4, à la précédente pour obtenir le carré demandé par le texte.

Les faces visibles de cette configuration sont les quatre faces du dessus, les quatre faces latérales apparaissant sur le dessin et leurs opposées, qui portent les mêmes nombres d'après la remarque faite plus haut. La somme des nombres de toutes ces faces est donc

$$S = 2 \times (5 + 6) + 2 \times (3 + 4 + 5 + 6) = 58.$$

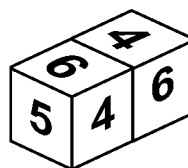
b) Partant d'un dé dans la position donnée par le texte, on cherche à lui accoler par sa face portant un 2, un dé qui ne laissera ensuite visibles que les faces portant les nombres 4, 5 et 6 ;



Ceci impose qu'il soit dans la position ci-contre (à droite)

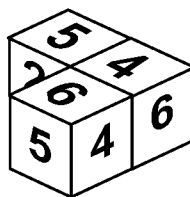


On a donc formé la paire ci-contre :



On cherche alors à accoler au deuxième dé, par sa face portant un 1, un dé qui ne laissera ensuite visibles que les faces portant les nombres 4, 5 et 6, ce qui impose que ce nouveau dé soit dans la position ci-contre à gauche.

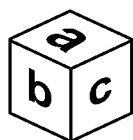
A ce stade, on a la configuration :



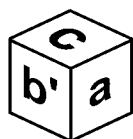
Mais celle-ci ne peut être complétée, puisque les deux faces dans l'angle portent le nombre 3.

Il est évident que toute autre position du dé au départ conduirait à la même impasse.

Au cas où ce dernier argument ne paraîtrait pas convaincant, une démonstration générale figure ci-après.

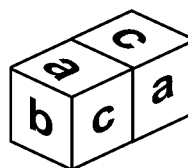


On part d'un dé dans une position qui ne laissera visibles, à la fin de la construction, que les faces portant les nombres 4, 5 et 6 quelles que soient les positions de ces trois nombres, c'est pourquoi nous les noterons a, b et c, les nombres sur les faces opposées étant notés respectivement a', b' et c'.



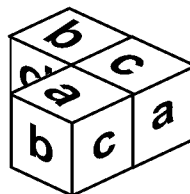
On cherche à accoler à ce dé, par sa face portant un b', un dé qui lui aussi ne laissera visible en fin de construction que les faces a, b et c ; ceci impose qu'il soit dans la position ci-contre à gauche.

On a donc formé la paire ci-contre :





On cherche alors à accoler au deuxième dé, par sa face portant un a' , un dé qui ne laissera ensuite visibles que les faces portant les nombres a , b et c , ce qui impose que ce nouveau dé soit dans la position ci-contre à gauche.



A ce stade, on a la configuration

Mais celle-ci ne peut être complétée, puisque les deux faces dans l'angle portent le nombre c' . Ceci prouve l'impossibilité d'une configuration de quatre dés en carré ne laissant visibles que des faces portant 3 nombres a , b et c et en particulier 4, 5 et 6.

c) 12 faces sont apparentes, chacun des quatre dés laissant apparaître 3 faces. La somme maximum des nombres laissés visibles par un dé est $4 + 5 + 6$ soit 15. La somme maximum théorique des nombres laissés visibles par les 4 dés est 4×15 soit 60.

Mais on vient de voir qu'une telle configuration laissant visibles quatre 4, quatre 5 et quatre 6 est impossible. Il y a donc au moins un nombre inférieur à 4.

Ce nombre inférieur à 4, s'il est unique, ne peut se trouver sur les faces du dessus car alors, les trois autres dés ne comporteraient sur leurs faces visibles que les nombres 4, 5 et 6. Or on a vu précédemment qu'une telle configuration de trois dés ne peut être complétée.

Le nombre inférieur à 4 se trouve donc sur une face de côté ; mais on peut alors affirmer qu'il y a deux nombres inférieurs à 4 d'après la propriété vue au 1° (deux faces visibles opposées sur le carré portent le même nombre). Il ne peut donc y avoir un unique nombre inférieur à 4, ni sur le dessus, ni sur les faces de côté. Il y a donc deux nombres au moins inférieurs à 4.

Le plus grands des nombres inférieurs à 4 est 3 et nous avons vu au 2°) b) une configuration qui laisse visibles quatre 6, quatre 5, deux 4 et deux 3. Elle donne donc le maximum de la somme, c'est à dire 58.

d) Le carré fabriqué au 2°) a) porte, sur les faces des dés posés sur la table, deux 2 sur des faces adjacentes et deux 1 sur des faces adjacentes.

Donc un deuxième carré de ce type, une fois retourné, peut être accolé au dessous du précédent de façon à former un cube. On aura donc ainsi un cube de somme maximum puisque chacune des moitiés du dessus et du dessous aura une somme maximum. Le maximum de la somme des nombres visibles sur un tel cube est donc 2×58 soit 116.

Exercice n° 2

Enoncé

Le quadrilatère des mi-chemins

Soit ABCD un carré.

1°) Construire E, F, G, H tels que E soit le milieu de [AH], F celui de [BE], G celui de [CF] et H celui de [DG] en indiquant clairement la méthode utilisée.

Préciser la nature du quadrilatère EFGH.

2°) Calculer $\frac{\text{Aire}(\text{EFGH})}{\text{Aire}(\text{ABCD})}$.

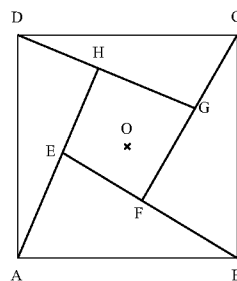
Solution

1°) On remarque d'abord que si l'on sait placer l'un des quatre points E, F, G, H la construction des trois autres en découle par des symétries centrales.

La solution de cette question est proposée par trois méthodes.

1^{ère} méthode : démarche vectorielle

Les relations qui suivent peuvent être écrites à partir d'un point O quelconque, mais le choix du centre de ABCD comme point O simplifie les expressions car $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OD}$.



Si E, F, G, H répondent au problème, alors : $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OH})$,
 $\overrightarrow{OF} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE})$, $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OF}) = \frac{1}{2} (-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OF})$,

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OG}) = \frac{1}{2} (-\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OG}).$$

Par substitutions successives, on peut exprimer $\overrightarrow{OE}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OE} &= \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} (-\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OG}) \right) = \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2} \overrightarrow{OB} + \frac{1}{4} (-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OF}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} \overrightarrow{OA} - \frac{1}{2} \overrightarrow{OB} + \frac{1}{8} (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE}) \right) = \frac{3}{8} \overrightarrow{OA} - \frac{3}{16} \overrightarrow{OB} + \frac{1}{16} \overrightarrow{OE}. \end{aligned}$$

D'où $\overrightarrow{OE} = \frac{2}{5} \overrightarrow{OA} - \frac{1}{5} \overrightarrow{OB}$, ce qui permet la construction de E puis de H par $H = S_E(A)$ (ce qui signifie : H est l'image de A par la symétrie de centre E), puis de G par $G = S_H(D)$ et enfin de F par $F = S_G(C)$.

On démontre alors que les points obtenus vérifient les propriétés demandées. Par construction, E, H et G sont les milieux respectifs de [AH], [DG] et [CF]. Reste à prouver que F est le milieu de [BE].

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{OC} + 2(\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OG}) = 2\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OC}$$

De même, on montre que $\overrightarrow{OG} = 2\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA}$.

D'où :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OF} &= 2 \left(2(2\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA}) - \overrightarrow{OD} \right) - \overrightarrow{OC} \\ &= 2 \left(2 \left(2 \left(\frac{2}{5} \overrightarrow{OA} - \frac{1}{5} \overrightarrow{OB} \right) - \overrightarrow{OA} \right) + \overrightarrow{OB} \right) + \overrightarrow{OA} \\ &= \frac{1}{5} \overrightarrow{OA} + \frac{2}{5} \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} \overrightarrow{OA} - \frac{1}{5} \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \right) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OB}). \end{aligned}$$

F est bien le milieu de [BE]. Il nous faut maintenant trouver la nature du quadrilatère EFGH.

On sait que $\overrightarrow{OE} = \frac{2}{5} \overrightarrow{OA} - \frac{1}{5} \overrightarrow{OB}$ et donc, de la même façon que :

$$\overrightarrow{OF} = \frac{2}{5} \overrightarrow{OB} - \frac{1}{5} \overrightarrow{OC} = \frac{1}{5} \overrightarrow{OE} = \frac{2}{5} \overrightarrow{OA} - \frac{1}{5} \overrightarrow{OB} + \frac{2}{5} \overrightarrow{OE} = \frac{2}{5} \overrightarrow{OA} - \frac{1}{5} \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{2}{5} \overrightarrow{OC} - \frac{1}{5} \overrightarrow{OD} = -\frac{2}{5} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{5} \overrightarrow{OB}$$

$$\text{et } \overrightarrow{OH} = \frac{2}{5} \overrightarrow{OD} - \frac{1}{5} \overrightarrow{OA} = -\frac{1}{5} \overrightarrow{OA} - \frac{2}{5} \overrightarrow{OB}.$$

Donc $\overrightarrow{OG} = -\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{OH} = -\overrightarrow{OF}$, ce qui prouve que EFGH est un parallélogramme puisque ses diagonales se coupent en leur milieu.

De plus, $\overrightarrow{EG} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{FH} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{OA} - \frac{4}{5}\overrightarrow{OB}$.

Alors $EG^2 = \overrightarrow{EG}^2 = \frac{16}{25}\overrightarrow{OA}^2 + \frac{4}{25}\overrightarrow{OB}^2 - \frac{16}{25}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{4}{5}OA^2$ puisque $OA = OB$ et que $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux. De même.

Donc $EG = FH$ et EFGH est un rectangle.

Enfin $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{FH} = \frac{8}{25}\overrightarrow{OA}^2 - \frac{8}{25}\overrightarrow{OB}^2 + \frac{12}{25}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ puisque $OA = OB$ et que $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux. Donc (EG) et (FH) sont perpendiculaires et EFGH est un carré.

2^{ème} méthode : démarche analytique

On appelle O le centre du carré ABCD. Le repère $(O; \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$ est orthonormé si on utilise la longueur OA comme unité. Dans ce repère, A a pour coordonnées (1 ; 0), B pour coordonnées (0 ; 1), C pour coordonnées (- 1 ; 0) et D pour coordonnées (0 ; - 1).

Si E, F, G, H répondent au problème alors, en notant $(x_E; y_E)$, $(x_F; y_F)$, $(x_G; y_G)$, $(x_H; y_H)$ les coordonnées respectives de E, F, G et H, on peut écrire :

$$\begin{cases} x_E = \frac{1}{2}(1 + x_H) \\ y_E = \frac{1}{2}y_H \end{cases}$$

puisque E est le milieu de [AH],

$$\begin{cases} x_F = \frac{1}{2}x_E \\ y_F = \frac{1}{2}(1 + y_E) \end{cases}$$

puisque F est le milieu de [BE],

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{2}(-1 + x_F) \\ y_G = \frac{1}{2}y_F \end{cases}$$

puisque G est le milieu de [CF],

$$\begin{cases} x_H = \frac{1}{2}x_G \\ y_H = \frac{1}{2}(-1 + y_G) \end{cases}$$

puisque H est le milieu de [DG].

On obtient donc deux systèmes de quatre équations à quatre inconnues, l'un pour les abscisses, l'autre pour les ordonnées, qui se résolvent séparément par substitution et donnent $E\left(\frac{2}{5}; -\frac{1}{5}\right)$, $F\left(\frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right)$, $G\left(-\frac{2}{5}; \frac{1}{5}\right)$ et $H\left(-\frac{1}{5}; -\frac{2}{5}\right)$.

On montre sans difficulté à l'aide de ces coordonnées que ces points vérifient bien les conditions demandées. On cherche maintenant la nature du quadrilatère EFGH. [EG] a pour milieu le point de coordonnées $(0; 0)$ de même que [FH]. EFGH est donc un parallélogramme. $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{FH}$ ont pour coordonnées respectives $\left(-\frac{4}{5}; \frac{2}{5}\right)$ et $\left(-\frac{2}{5}; -\frac{4}{5}\right)$.

Donc $EG^2 = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{5}$ et $FH^2 = \left(-\frac{2}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4}{5}$. Alors $EG = FH$; EFGH est un rectangle.

Enfin, pour $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{FH}$, $xx' + yy' = \left(-\frac{4}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) + \frac{2}{5} \times \left(-\frac{4}{5}\right) = 0$. Donc (EG) et (FH) sont perpendiculaires et EFGH est un carré.

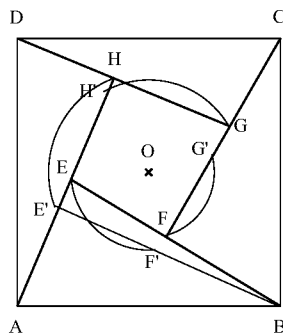
3^{ème} méthode : démarche géométrique en utilisant une rotation

Supposons qu'il existe une solution.

Soit O le centre du carré. On considère la rotation R de centre O et d'angle $\pi/2$ ou $-\pi/2$ suivant le cas de figure.

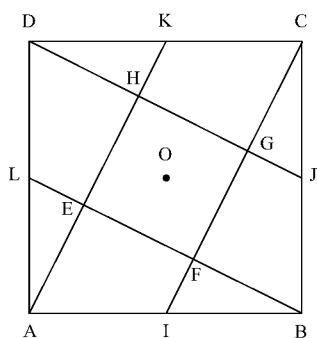
$$R(A) = B, R(B) = C, R(C) = D, R(D) = A.$$

Montrons qu'alors $R(E) = F$, $R(F) = G$, $R(G) = H$, $R(H) = E$. Soit $E' = R(H)$ et $F' = R(E)$. E étant le milieu de $[AH]$, F' est le milieu du segment dont les extrémités sont les images de A et H d'après les propriétés de la rotation, c'est à dire que F' est le milieu de $[BE']$. Or F est le milieu de $[BE]$ par hypothèse. Donc, d'après le théorème des milieux, $FF' = \frac{1}{2}EE'$.



En posant $G' = R(F)$ et $H' = R(G)$, on démontre de même que $GG' = \frac{1}{2}FF'$, $HH' = \frac{1}{2}GG'$ et $EE' = \frac{1}{2}HH'$. On en conclut donc $EE' = \left(\frac{1}{2}\right)^4 EE'$ d'où $EE' = 0$, soit $E = E'$. De même $F = F'$, $G = G'$ et $H = H'$. Ce qui prouve la propriété énoncée ci-dessus.

On en déduit que $OE = OF = OG = OH$, que les angles $\widehat{EOF}$, $\widehat{FOG}$, $\widehat{GOH}$ et $\widehat{HOE}$ sont droits, et donc enfin que $EFGH$ est un carré.



Appelons I le point d'intersection de (AB) et (CF) , J celui de (BC) et (DG) , K celui de (CD) et (AH) et L celui de (DA) et (BE) . (CI) est parallèle à (AH) puisque $EFGH$ est un carré. Or F est le milieu de $[BE]$ donc I est le milieu de $[AB]$ d'après la réciproque du théorème des milieux.

On possède maintenant une méthode de construction. $ABCD$ étant donné, on construit les milieux I , J , K et L respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. On appelle E , F les points d'intersection de (BL) avec respectivement (AK) et (CI) , G et H les points d'intersection de (DJ) avec respectivement (CI) et (AK) .

Par construction, $\overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{KC}$ donc AKCI est un parallélogramme et (CI) est parallèle à (AK). I étant le milieu de [AB], on en déduit, d'après le théorème des milieux, que F est le milieu de [BE]. De la même façon, G, H et E sont les milieux respectifs de [CF], [DG] et [AH].

Les points E, F, G et H construits par la méthode ci-dessus répondent bien aux conditions du texte.

2°) ABE étant un triangle rectangle en E,

$$\text{Aire (BEA)} = \frac{1}{2}BE \times AE = EF \times AE = \text{Aire (EFGH)} \text{ puisque } EH = AE.$$

$$\text{Or Aire (BEA)} = \text{Aire (CFB)} = \text{Aire(DGC)} = \text{Aire (AHD)}$$

$$\text{et Aire(BEA)} + \text{Aire (CFB)} + \text{Aire (DGC)} + \text{Aire (AHD)} + \text{Aire (EFGH)} = \text{Aire (ABCD)}.$$

$$\text{Alors } 5 \times \text{Aire (EFGH)} = \text{Aire (ABCD)} \text{ ou } \frac{\text{Aire(EFGH)}}{\text{Aire(ABCD)}} = \frac{1}{5}.$$

Bilan

série	inscrits	ayant composé
ES	1	1
L		
S	84	56
SMS		
STI	6	4
STL		
STT	7	6
Total	98	67
		19 filles-48 garçons

L'érosion du nombre d'inscrits et de participants se poursuit quoique ralentie.

L'annonce répétée d'une évolution des sujets n'a pas provoqué d'afflux d'inscriptions dans les séries autres que S.

Il est à craindre, à ce propos, que les résultats très médiocres obtenus par les quelques candidats de ces séries ne soient pas une incitation à la participation de leurs camarades de ces mêmes séries l'année prochaine.