

BORDEAUX

Exercice n° 1

Enoncé

Le plus court réseau routier

Quatre maisons sont situées aux quatre coins d'un carré de côté 1. On souhaite construire un réseau routier qui permette de relier les maisons mais on veut que ce réseau soit le plus court possible.

1°) Dans un premier temps, on envisage de créer un rond-point à l'intérieur du carré comme dessiné sur la figure 1. Démontrer que dans ce cas, le réseau le plus court est obtenu lorsque le rond-point est situé au centre du carré.

2°) Un des habitants s'est rendu compte qu'avec deux ronds-points placés comme sur la figure 2, on pouvait réduire la longueur du réseau. Vérifier qu'il a raison.

3°) Trouver la valeur de x qui permet d'obtenir le réseau le plus court dans la configuration de la figure 3.

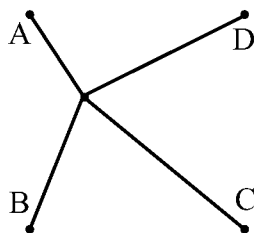


Figure 1

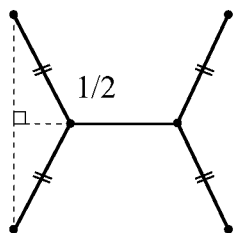


Figure 2

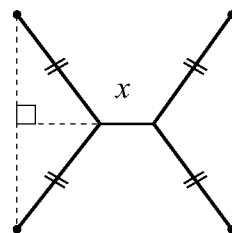


Figure 3

Solution de l'équipe académique

1) C'est une application de l'inégalité triangulaire.

2) On obtient une longueur totale de $0.5 + \sqrt{5}$, ce qui est inférieur à $2\sqrt{2}$ de la question 1.

3) Pour cette question, on exprime la longueur en fonction de x . On obtient

$$L = x + 4\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-x}{2}\right)^2} = x + 2\sqrt{x^2 - 2x + 2}$$

Si on trace la courbe représentative de cette fonction sur l'intervalle $[0 ; 1]$ avec la calculatrice, on constate qu'il y a un minimum d'environ 2,732 atteint pour x environ égal à 0,4226. On retrouve ce résultat en dérivant la fonction obtenue, on a alors la valeur exacte de x pour laquelle le minimum est atteint et c'est $1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Solutions proposées par Abderrahim Ouardini

auteur, d'ailleurs, de l'exercice n° 2.

Question 1

Pour un point P quelconque du plan, on a, d'après l'inégalité triangulaire :

$$PA + PC \geq AC \quad \text{et} \quad PB + PD \geq BD$$

d'où, par somme membre à membre, l'inégalité :

$$PA + PB + PC + PD \geq 2AC = 2\sqrt{2},$$

l'égalité est vérifiée si et seulement si $PA + PC = AC$ et $PB + PD = BD$, ou encore le point P appartient à l'intersection des segments $[AC]$ et $[BD]$. Donc le réseau est le plus court lorsque le rond-point est situé au centre du carré¹.

*Quelques inégalités supplémentaires autour de la **question 1**.*

Plus généralement, j'ai démontré le résultat suivant ²

¹Voir aussi le problème 2-18 dans « *Mathématiques de compétition : 112 problèmes corrigés* » - A. Ouardini - Ed. Ellipses - Paris 2000

« n étant un entier naturel supérieur ou égal à 3.
 $(A_1 \dots A_n)$ est un polygone régulier inscrit dans un cercle de centre O
 et de rayon R , soit P un plan de ce polygone. On a l'inégalité suivante :

$$PA_1 + PA_2 + \dots + PA_n \geq n |OP^n - R^n|^{\frac{1}{n}}$$

L'égalité a lieu si et seulement si $P = O$.

On a aussi le résultat suivant :

Soient $d = \min(PA, PB, PC, PD)$ et $D = \max(PA, PB, PC, PD)$, on a l'inégalité :

$$PA + PB + PC + PD \geq D + (1 + \sqrt{2}) d,$$

l'inégalité a lieu si et seulement si le point P appartient au cercle circonscrit au carré $ABCD^3$.

Question 2

La longueur totale du réseau est $\frac{1}{2} + \sqrt{5} < 2\sqrt{2}$.

Question 3

A part la solution officielle, je propose ici cinq solutions qui n'utilisent pas la notion de dérivée⁴.

Solution 1

Par application du théorème de Pythagore, la longueur L du réseau peut s'exprimer en fonction de x par

$$L = x + 4\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-x}{2}\right)^2} = x + 2\sqrt{x^2 - 2x + 2}.$$

De l'égalité $L = x + 2\sqrt{x^2 - 2x + 2}$, on déduit $3x^2 + (2L - 8)x + 8 - L^2 = 0$, ce qui exige que le discriminant de cette équation du second degré en x

²Problème 4-26 dans « *Mathématiques de compétition : 112 problèmes corrigés* »

³Voir I.S.Gál-L. Bankoff, Problem E 1308 *Amer. Math. Monthly* 65 (1958), 205 and 710

⁴*Máximos y mínimos sin derivación. Tres ejemplos.* A. Ouardini - Revista Escolar de la OIM-Número 3 (2002)

soit positif, c'est-à-dire : $\Delta = 16(L^2 - 2L - 2) \geq 0$, ce qui implique que $L \geq 1 + \sqrt{3}$. Donc le minimum de L est $1 + \sqrt{3}$, il est atteint pour $x = -\frac{2(1 + \sqrt{3}) - 8}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Solution 2

Par raison de la symétrie centrale de centre O (centre du carré), le problème se ramène à minimiser $MA + MB + MO$ et le point qui répond à la question n'est autre que *le point de Fermat* (voir en annexe, page 52) pour le triangle ABO (rectangle isocèle, donc évidemment les mesures de ces angles sont strictement inférieures à 120°), ainsi le point de Fermat est strictement à l'intérieur du triangle ABO. Donc il faut et il suffit que $\widehat{AMB} = 120^\circ$ ou encore que $\widehat{KMA} = 60^\circ$ (K étant le milieu du segment [AB]).

Solution 3

Désignons par α la mesure en radian de l'angle géométrique $\widehat{KAM}$, ($\alpha \in [0, \frac{\pi}{4}]$) on a :

$$AM = \frac{1}{2 \cos \alpha} ; KM = \frac{1}{2} \tan \alpha ; MO = OK - KM = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tan \alpha ;$$

(car $M \in [KO]$)

donc :

$$MA + MB + MO = \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tan \alpha = \frac{1}{2} + \frac{2 - \sin \alpha}{2 \cos \alpha},$$

Des essais font conjecturer un minimum pour $\alpha = \frac{\pi}{6}$. D'où l'idée de faire intervenir $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$ ou, pour éviter le coefficient $\frac{1}{2}$, $2 \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$ qui, développé, donne $\sqrt{3} \cos \alpha + \sin \alpha$.

De l'égalité $\sqrt{3} \cos \alpha + \sin \alpha = 2 \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$, on déduit $\sqrt{3} \cos \alpha + \sin \alpha \leq 2$, avec égalité si et seulement si $\alpha = \frac{\pi}{6}$, donc $\frac{2 - \sin \alpha}{2 \cos \alpha} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

et par suite $MA + MB + MO \geq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$, ce qui permet de conclure de la même manière qu'avec la solution 2.

Solution 4

Pour $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, la quantité $\frac{2 - \sin \alpha}{\cos \alpha}$ est strictement positive et varie dans le même sens que son carré.

On a

$$\left(\frac{2 - \sin \alpha}{\cos \alpha}\right)^2 = \frac{4 - 4 \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha},$$

et, en faisant intervenir 3, le minimum étant conjecturé pour $\alpha = \frac{\pi}{6}$,
auquel cas $\left(\frac{2 - \sin \alpha}{\cos \alpha}\right)^2 = 3$,

$$\left(\frac{2 - \sin \alpha}{\cos \alpha}\right)^2 - 3 = \frac{4 - 4 \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} - 3 = \frac{(2 \sin \alpha - 1)^2}{1 - \sin^2 \alpha},$$

donc $\left(\frac{2 - \sin \alpha}{\cos \alpha}\right)^2 \geq 3$, et l'égalité a lieu si et seulement si $2 \sin \alpha - 1 = 0$,
c'est-à-dire $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Solution 5

Posons $t = \tan \frac{\alpha}{2}$, on a $\cos \alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$ et $\sin \alpha = \frac{2t}{1 + t^2}$.

Remarquons d'abord que $0 < t < 1$, puisque $0 < \tan \frac{\alpha}{2} \leq \tan \frac{\pi}{8} < \tan \frac{\pi}{4} = 1$. L'expression $\frac{2 - \sin \alpha}{\cos \alpha}$ peut se réécrire en fonction de t sous la forme $\frac{2 - \sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \frac{1 + t^2 - t}{1 - t^2}$. Et on a successivement les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} 2 \frac{1 + t^2 - t}{1 - t^2} \geq \sqrt{3} &\Leftrightarrow (3 + \sqrt{3})t^2 - 2t + 2 - \sqrt{3} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow t^2 - 2(2 - \sqrt{3})t + (2 - \sqrt{3})^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (t - (2 - \sqrt{3}))^2 \geq 0 \end{aligned}$$

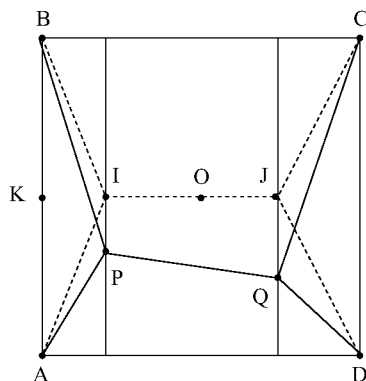
ce qui est vrai ! Et ceci prouve l'inégalité $\frac{2 - \sin \alpha}{\cos \alpha} \geq \sqrt{3}$, l'égalité a lieu

si et seulement si $t = 2 - \sqrt{3}$, c'est-à-dire quand $\sin \alpha = \frac{2(2 - \sqrt{3})}{1 + (2 - \sqrt{3})^2} =$

$$\frac{2(2 - \sqrt{3})}{4(2 - \sqrt{3})} = \frac{1}{2}, \text{ donc pour } \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

PROLONGEMENTS⁵

Justification du choix de l'habitant :



Soient P et Q les deux points de rond point et supposons que les sommets A, B, C et D du carré soient reliés par un réseau passant par les points P et Q. Le point P est relié à trois au moins des points A, B, C, D et Q. Puisque la figure est globalement invariante par les rotations $\mathcal{R}\left(O, \frac{k\pi}{2}\right)$ $k \in \{1, 2, 3\}$, alors on peut supposer que le point P est relié à A, B et Q et Q est relié à C et D. (Si P est relié à A, B et C, la présence du point Q ne peut qu'augmenter la longueur du réseau).

Par principe de réflexion, les chemins AIB et CJD sont respectivement plus courts que les chemins APB et CQD. Donc il suffit de minimiser les quantités $AI + IB + IO$ et $DJ + JC + JO$.

COMMENTAIRES⁶

Si les maisons étaient réparties différemment (par exemple les sommets d'un polygone régulier), quel serait le réseau de longueur minimale ? Quand il s'agit de n ronds points (n entier supérieur ou égal à 3).

Dans le cas d'un carré et pour n entier supérieur ou égal à 4, le problème devient très difficile et on ne connaît que quelques estimations de la longueur minimale du réseau.

⁵Hugo Steinhaus - *Cent problèmes élémentaires de mathématiques résolus*. Problème 73. PWN-Gauthier-Villars, 1965

⁶Voir

Paul Halmos - *Problèmes pour petits et grands*. Problème 5E. Cassini, Paris, 2000.

D.J. Nezman - *A problem seminar*. Problem 73. Springer-Verlag, N.Y., 1992

Hallard T. Croft, Kenneth J. Falconer, Richard K. Guy - *Unsolved Problems in Geometry*. Volume II, Springer-Verlag, 1991.

Exercice n° 2

Enoncé

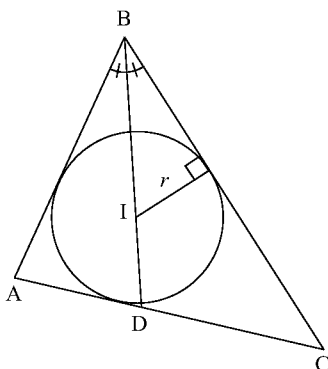
Les triangles académiques

Première question : Démontrer que dans un triangle ABC, si on note p le périmètre et r le rayon du cercle inscrit, alors l'aire S du triangle est donnée par : $S = r \times \frac{p}{2}$.

Deuxième question : Une unité de longueur étant choisie, on appelle triangle *académique* un triangle dont les mesures des côtés sont en progression arithmétique de raison 1. Dans tout l'exercice, on considère un triangle ABC tel que $AB < AC < BC$. Ainsi, un tel triangle est *académique* si : $AC = AB + 1$ et $BC = AB + 2$.

1°) On note I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC et D le pied de la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ABC}$. Démontrer que si ABC est *académique* alors $BD = 3ID$.

2°) Un triangle *académique* peut-il être rectangle ? Justifier. Quelles sont alors ses dimensions ?



3°) On suppose que le triangle ABC est académique et que $AB > 3$. Démontrer que les trois angles du triangle ABC sont aigus et qu'un seul d'entre eux a une mesure supérieure à 60° .

Solution de l'équipe académique

La première question est un exercice classique de seconde : Si on note I le centre du cercle inscrit du triangle ABC, le triangle IAB a pour aire $\frac{r \times AB}{2}$, le triangle IBC a pour aire $\frac{r \times BC}{2}$ et le triangle IAC a pour

aire $\frac{r \times AC}{2}$, la somme de ces trois aires est l'aire de ABC et on trouve bien le résultat.

Dans la deuxième question, le 1) se résout en utilisant Thalès et la propriété obtenue dans la première question ; le plus simple est de noter K le projeté orthogonal de I sur [AC] ; on a $S = r \times \frac{p}{2}$ et ici $p = 3x + 3 = 3AC$. D'autre part, on a aussi $S = BH \times \frac{AC}{2}$ donc $BH = 3r = 3IK$.

Puis avec Thalès, on obtient $\frac{ID}{BD} = \frac{IK}{BH} = \frac{1}{3}$, d'où le résultat.

Pour le 2), on aboutit à une équation du second degré, $x^2 - 2x - 3 = 0$ en utilisant Pythagore, d'où la solution $x = 3$. Les côtés du triangle sont alors de 3, 4 et 5.

Pour le 3), on trouve le résultat en utilisant la formule d'Al Kaschi mais on peut aussi obtenir une partie des résultats par des considérations géométriques.

Solution proposée par A. Ouardini

Question 1

En écrivant que l'aire S du triangle ABC est égale à la somme des aires des triangles AIB, BIC et AIC, (puisque le point I est à l'intérieur du triangle ABC) on obtient :

$$S = \frac{r \times AB}{2} + \frac{r \times BC}{2} + \frac{r \times CA}{2} = r \times \left(\frac{AB + BC + CA}{2} \right),$$

donc $S = r \times \frac{p}{2}$.

Question 2

Sans nuire à la généralité du problème, on peut supposer que la raison de la progression arithmétique est égale à 1. En effet, si la progression arithmétique a pour raison r ($r > 0$), alors il suffit de considérer une homothétie de rapport $\frac{1}{r}$.

1. Désignons par K le pied de la hauteur issue de B dans le triangle ABC.

On a $S = \frac{BK \times AC}{2}$ et d'autre part, d'après la première question,
 $S = r \times \left(\frac{AB + BC + CA}{2} \right)$,
 donc $\frac{r}{BK} = \frac{AC}{AB + BC + CA} = \frac{AC}{2AC + CA} = \frac{1}{3}$ et, pour conclure, il
 suffit de remarquer par le théorème de Thalès que $\frac{ID}{BD} = \frac{r}{BK}$.

Remarque : si un triangle vérifie l'égalité $BD=3ID$, alors les mesures de ses côtés dans l'ordre AB, AC, BC sont en progression arithmétique.

2. Si le triangle académique ABC est rectangle, alors, le côté $[BC]$ est son hypoténuse. D'après le théorème de Pythagore, on a $BC^2 = AB^2 + AC^2$ égalité équivalente à $(AB - 3)(AB + 1) = 0$, ce qui entraîne $AB = 3$, $AC = 4$ et $BC = 5$.

3. Pour montrer que les trois angles du triangle ABC sont aigus, il suffit de montrer que la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ est strictement inférieure à 90° (angle opposé au plus grand côté), ce qui revient à montrer que $AB^2 + AC^2 > BC^2$, inégalité équivalente après réduction à $(AB - 3)(AB + 1) > 0$ (compte tenu de $AB > 3$), ce qui montre notre assertion.

Vu que $AB < AC < BC$, alors $\widehat{C} < \widehat{B} < \widehat{A}$ on en déduit la double inégalité : $3\widehat{C} < \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} < 3\widehat{A}$, ou encore $\widehat{C} < 60^\circ$ et $\widehat{A} > 60^\circ$, donc, pour conclure, il suffit de prouver que $\widehat{B} < 60^\circ$.

Par application du théorème d'Al-Kashi, on a

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC \cos \widehat{B},$$

donc :

$$\cos \widehat{B} = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB.BC} = \frac{AB^2 + (AB + 2)^2 - (AB + 1)^2}{2AB(AB + 2)},$$

soit après réduction : $\cos \widehat{B} = \frac{AB^2 + 2AB + 3}{2AB(AB + 2)}$.

On a $\cos \widehat{B} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2AB(AB + 2)} > 0$, donc $\widehat{B} < 60^\circ$ (il s'agit d'angles aigus). Ainsi l'angle $\widehat{BAC}$ est le seul angle qui a une mesure strictement supérieure à 60° .

Autre méthode pour montrer que $\widehat{B} < 60^\circ$.

D'après le théorème d'Al-Kashi, on a

$$\frac{(AB + BC)^2}{4} = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \widehat{B}$$

d'où

$$\cos \widehat{B} = \frac{3AB^2 + 3BC^2 - 2AB \cdot BC}{8AB \cdot BC} = -\frac{1}{4} + \frac{3}{8} \left(\frac{AB}{BC} + \frac{BC}{AB} \right),$$

et par utilisation de l'inégalité $\frac{AB}{BC} + \frac{BC}{AB} > 2$ (inégalité stricte puisque $AB \neq BC$), on obtient :

$$\cos \widehat{B} = -\frac{1}{4} + \frac{3}{8} \left(\frac{AB}{BC} + \frac{BC}{AB} \right) > -\frac{1}{4} + \frac{3}{8} \times 2 = \frac{1}{2}.$$

Remarque : En général, un triangle peut avoir deux angles de mesures strictement supérieures à 60° , par exemple 40° , 70° et 70° .

La proposition suivante nous donne une caractérisation d'un triangle rectangle et d'un triangle qui possède un angle obtus.

Proposition. Soient a, b et c les mesures des côtés d'un triangle. On suppose que $a \geq \max(b, c)$. On a :

i) Le triangle est rectangle si et seulement si :

$$\left(\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b} \right) \left(\sqrt{a+c} + \sqrt{a-c} \right) = \sqrt{2}(a+b+c).$$

ii) Le triangle a un angle obtus si et seulement si :

$$\left(\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b} \right) \left(\sqrt{a+c} + \sqrt{a-c} \right) > \sqrt{2}(a+b+c).$$

et la constante $\sqrt{2}$ ne peut pas être remplacée par un nombre réel plus grand.

Dans le journal *Revista Escolar de la OIM*⁷, j'ai soumis le problème suivant qui donne une caractérisation d'un triangle dont les mesures des côtés sont en progression arithmétique.

⁷A. Ouardini - *Revista Escolar de la OIM* - Número 20 (2005) (à paraître)

Problème

On considère un triangle ABC dont les mesures des côtés sont rangées dans l'ordre $AB \leq AC \leq BC$. On désigne par I le centre de son cercle inscrit et T le point de contact du cercle inscrit dans le triangle ABC avec le côté $[AC]$, le cercle circonscrit au triangle AIC recoupe la droite (IT) en J .

Prouver l'équivalence entre les deux propositions :

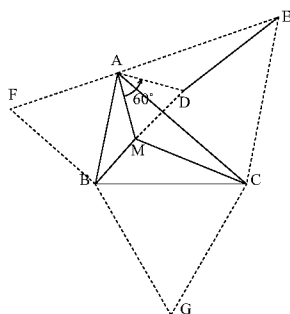
- i) La mesure du segment hauteur issue du sommet B dans le triangle ABC est égale à TJ .
- ii) Les longueurs AB, AC et BC sont en progression arithmétique.

ANNEXE**A propos du *Point de Fermat***

ABC est un triangle avec ses angles inférieurs à 120° .

Est-il possible de choisir le point M , intérieur au triangle tel que $d = MA + MB + MC$ soit minimale ?

Essayons de « former » d . Pour cela, il serait intéressant de réduire à deux les trois points de référence A, B, C . Or il existe une opération qui le permet : une rotation de 60° .



Soit la rotation $(A, 60^\circ)$ qui envoie M en D et C en E (Cf. la figure ci-contre).

Alors d est « formé » selon $BM + MD + DE$. Le minimum se produit si et seulement si M et D sont sur $[BE]$.

Pour achever de placer M , remarquons qu'il doit également se trouver sur $[CF]$, avec ABF équilatéral extérieur à ABC (et sur $[AG]$, avec BCG équilatéral extérieur à ABC).

H. Bareil