

BESANÇON

Exercice n° 1

Énoncé

Un libraire expert en comptabilité

Un ami libraire avait acheté un stock de stylos par lots de 5 et avait pu obtenir un bon rabais en achetant le même nombre de stylos plumes. Il avait acheté 5 € le lot de 5 stylos et 20 € le lot de 5 stylos plumes.

Il les revendit à l'unité en faisant un bénéfice de 20% sur chaque stylo vendu et de 25% sur chaque stylo plume.

Un soir en faisant le bilan de son stock et sa comptabilité, il se rendit compte qu'il était exactement rentré dans ses frais alors qu'il lui restait 504 pièces en stock dont peu de stylos, en tout cas moins de cinquante. Combien de stylos avait-il acheté à son fournisseur ?

Solution

Notons n le nombre de lots de stylos achetés. Ainsi le libraire a acheté $5n$ stylos et $5n$ stylos plumes.

Notons x le nombre de stylos non vendus. Ainsi le libraire a pour invendus x stylos et $(504 - x)$ stylos plumes.

Il a acheté 1 € chaque stylo et le revend 1,20 €. Il a acheté 4 € chaque stylo plume et le revend 5 €.

L'équation traduisant l'équilibre de ses comptes s'écrit donc :

$$1,20(5n - x) + 5(5n - 504 + x) = 1 \times 5n + 4 \times 5n.$$

Soit après simplification :

$$30n + 19x = 12\,600.$$

On peut résoudre par tâtonnement ou remarquer que 30 et 12 600 étant multiples de 10 (et même de 30), x sera aussi multiple de 10 (et même de 30). La seule solution est donc, compte tenu de $0 < x < 50$: $x = 30$ d'où on trouve $n = 401$.

Le libraire a donc acheté 2005 stylos.

Exercice n° 2

Enoncé

Le parc du chateau

1) Trois points distincts A,B,C sont situés à l'intérieur d'un carré de côté de longueur a . On veut démontrer que l'aire du triangle (A,B,C) est inférieure ou égale à $\frac{a^2}{2}$.

- a) Démontrer ce résultat dans le cas particulier où le côté [BC] du triangle est parallèle à un des côtés du carré.
- b) Démontrer le résultat dans le cas général. (On pourra s'aider du cas particulier.)

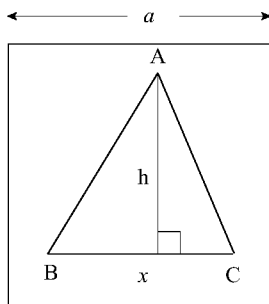
2) Le parc d'un château occupe une surface carrée de 120 m de côté. Dans ce parc sont plantés 73 arbres.

- a) Montrer que trois des arbres sont les sommets d'un triangle d'aire inférieure ou égale à 200 m².
- b) Le châtelain souhaite construire une fontaine de telle sorte que celle-ci soit située à moins de 15 m de trois arbres de son parc. Est-ce possible ? Justifier.

Solution

Question 1) a) : Soit S l'aire du triangle (A,B,C), x la longueur du segment [BC] et h la hauteur du triangle (A,B,C) issue du point A. On

a : $S = \frac{hx}{2}$. Or $x \leq a$ et $h \leq a$, donc : $S \leq \frac{a^2}{2}$.



Question 1) b) : On suppose qu'aucun des trois côtés du triangle (A,B,C) n'est parallèle à un des quatre côtés du carré. Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les trois points A, B, C ont donc des ordonnées distinctes. On note A, B et C les trois sommets du triangle de telle sorte que, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'ordonnée du point A est strictement comprise entre celles de B et C .

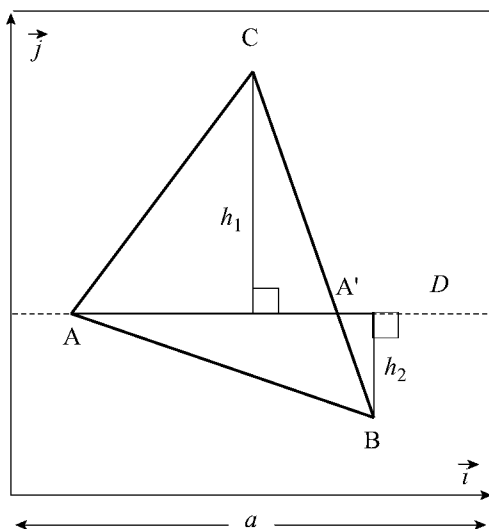
Soit D la droite passant par A , de vecteur directeur $\vec{i}$. Les points B et C sont situés de part et d'autre de la droite D . Donc, le segment $[BC]$ coupe cette droite en un point A' .

On note S, S_1 et S_2 les aires respectives des triangles (A,B,C) , (A,A',C) et (A,A',B) .

Soient h_1 et h_2 les hauteurs respectives des triangles (A,A',C) et (A,A',B) , issues des points C et B . Enfin, soit x la longueur du segment $[AA']$. On a : $S_1 = \frac{xh_1}{2}$ et $S_2 = \frac{xh_2}{2}$.

Donc : $S = S_1 + S_2 = \frac{x(h_1 + h_2)}{2}$.

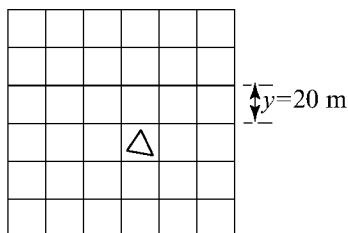
Or : $x \leq a$ et $h_1 + h_2 \leq a$. Donc : $S \leq \frac{a^2}{2}$



Question 2) a) :

On découpe le parc en 36 carrés de longueur $y = 20$ m. Comme $73 = 2 \times 36 + 1$, on en déduit, par le principe des tiroirs, qu'au moins l'un des 36 carrés contient au moins trois arbres. Soit S' l'aire du triangle formé par ces trois arbres. D'après la première question, on a :

$$S' \leq \frac{y^2}{2} = 200 \text{ m}^2.$$



Question 2) b) :

D'après la question précédente, un des 36 carrés contient trois arbres formant un triangle d'aire inférieure ou égale à 200 m^2 . On note A, B, C ces trois arbres et I le centre du carré qui les contient. La longueur de la diagonale du carré est égale à : $d = y\sqrt{2} \text{ m}$. Les trois distances IA , IB et IC sont inférieures ou égales à $\frac{d}{2} = \frac{y}{\sqrt{2}} \approx 14,1 \text{ m}$. Le châtelain peut donc construire sa fontaine au point I, elle sera bien à moins de 15 m de 3 arbres de son parc.

