

AMIENS

Exercice n° 1

Énoncé

On considère trois réels positifs tels que, pour chaque paire choisie, la différence entre la somme de ces deux réels et le réel restant soit positive. Prouver que le produit de ces trois différences est inférieur ou égal au produit des trois nombres.

Solution

Nommons a, b et c ces trois réels positifs. D'après l'énoncé, on a donc : $a + b - c \geq 0$, $a + c - b \geq 0$ et $b + c - a \geq 0$.

L'astuce consiste ensuite à considérer, non pas le produit de ces trois différences, mais le carré du dit produit, que l'on écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} & [(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)]^2 \\ &= [(a + b - c)(a + c - b)][(a + b - c)(b + c - a)][(a + c - b)(b + c - a)] \end{aligned}$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} (a + b - c)(a + c - b) &= (a + (b - c))(a - (b - c)) = a^2 - (b - c)^2 \leq a^2 \\ (a + b - c)(b + c - a) &= (b + (a - c))(b - (a - c)) = b^2 - (a - c)^2 \leq b^2 \\ (a + c - b)(b + c - a) &= (c + (a - b))(c - (a - b)) = c^2 - (a - b)^2 \leq c^2 \end{aligned}$$

Par conséquent : $[(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)]^2 \leq a^2 b^2 c^2$.

Or $(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a) \geq 0$ et $abc \geq 0$ par hypothèse, on peut donc conclure que : $(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a) \leq abc$.

Exercice n° 2

Enoncé

La figure 1 représente une fenêtre éclairée par le soleil. Tracer son ombre sur le plancher (l'ombre du coin inférieur gauche est donnée).

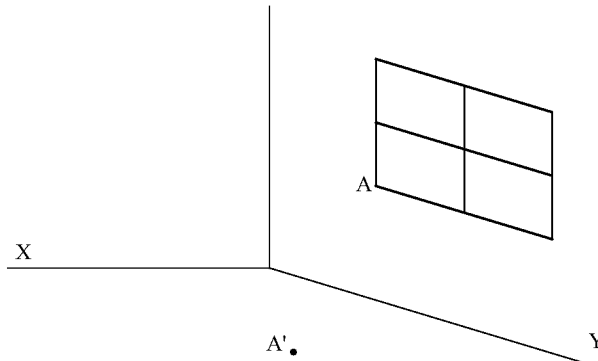


figure 1

La figure 2 représente la même fenêtre éclairée cette fois par un lampadaire. Tracer son ombre sur le plancher (l'ombre du bord inférieur est donnée).

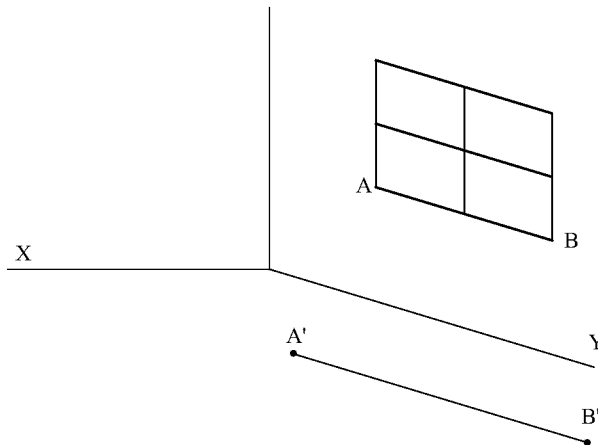


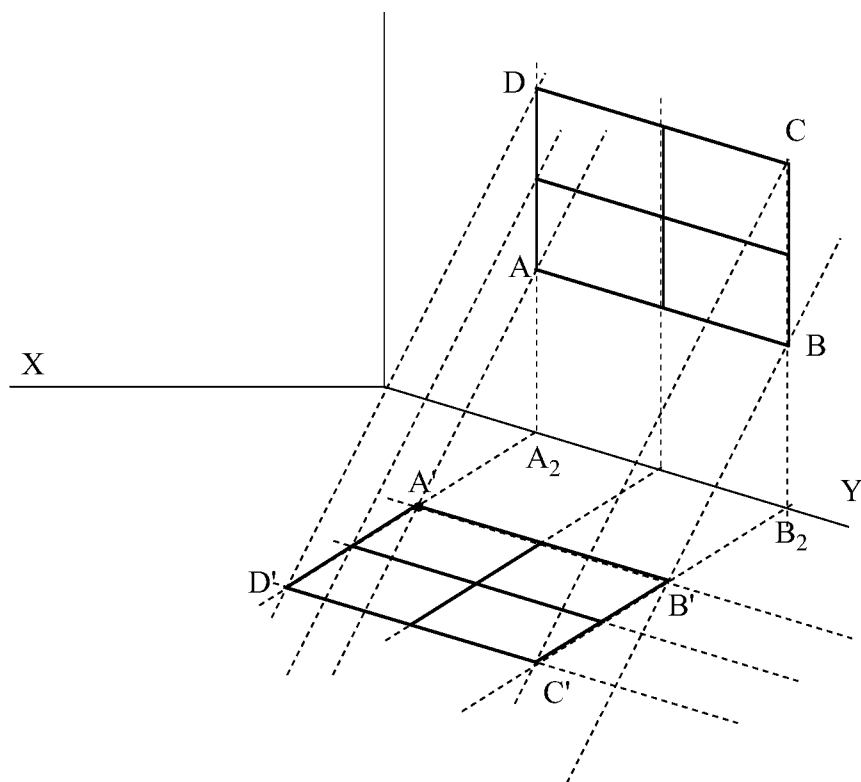
figure 2

On réalisera les constructions, qui resteront apparentes, sur la feuille jointe qui sera rendue avec la copie.

Solution

Situation 1

On construit tout d'abord la droite (AA') . En considérant que le soleil se trouve à l'infini, on admet que l'angle d'incidence du soleil est identique pour les quatre coins de la fenêtre. On trace donc les parallèles à (AA') passant par B, C et D. On construit ensuite les points A_2 et B_2 , pieds des deux côtés de la fenêtre. Les points A_2 , A et D sont alignés, donc leurs projetés le sont aussi (idem pour B_2 , B et C). Or A_2 et B_2 sont leurs propres projetés. On peut donc construire le point D' , point d'intersection de la parallèle à (AA') passant par D et de la droite (A_2A') . On trace ensuite la parallèle à (A_2A') passant par B_2 , et les points B' et C' sont les points d'intersection de cette droite avec les parallèles à (AA') passant par B et C. Le reste de la construction se fait alors sans peine.



Situation 2

On construit tout d'abord le point d'intersection des droites (AA') et (BB') , nommé I. On construit ensuite les points A_2 et B_2 , pieds des deux côtés de la fenêtre. Les points A_2 , A et D sont alignés, donc leurs projetés le sont aussi (idem pour B_2 , B et C). Or A_2 et B_2 sont leurs propres projetés. On peut donc construire le point C' , point d'intersection des droites (IC) et (B_2B') , et le point D' , point d'intersection de (ID) et (A_2A') . Le reste de la construction se fait alors sans peine.

