

AIX-MARSEILLE

Exercice n° 1

(A traiter par tous les candidats)

Enoncé

C'est du vol

Lors d'une soirée dansante, un vol a été commis. L'inspecteur Jean QUETTE, appelé sur les lieux, réunit toutes les personnes et demande à chacune avec combien de personnes elle a dansé.

Chacune des femmes répond qu'elle a dansé avec trois hommes. Chacun des hommes déclare avoir dansé avec une, deux ou trois femmes.

Il y a davantage d'hommes déclarant avoir dansé avec trois femmes que d'hommes déclarant avoir dansé avec une seule femme.

Après avoir constaté que moins des deux cinquièmes des personnes étaient des femmes et après avoir un peu réfléchi, l'inspecteur conclut qu'une personne au moins a menti et il a raison.

Expliquer pourquoi.

Solution

Notons f le nombre de femmes, h le nombre d'hommes, h_1 le nombre d'hommes déclarant avoir dansé avec une femme, h_2 le nombre d'hommes déclarant avoir dansé avec deux femmes et h_3 le nombre d'hommes déclarant avoir dansé avec trois femmes.

Les données de l'exercice se traduisent par :

$$3f = h_1 + 2h_2 + 3h_3 \quad (1)$$

$$h_3 > h_1 \quad (2)$$

$$f < \frac{2}{5}(f + h) \quad (3)$$

$$h = h_1 + h_2 + h_3 \quad (4).$$

(3) s'écrit : $3f < 2h$, soit $3f < 2h_1 + 2h_2 + 2h_3$.

D'après (1) et (3) : $h_3 < h_1$.

Cela contredit (2). Donc une personne au moins a menti.

Exercice n° 2

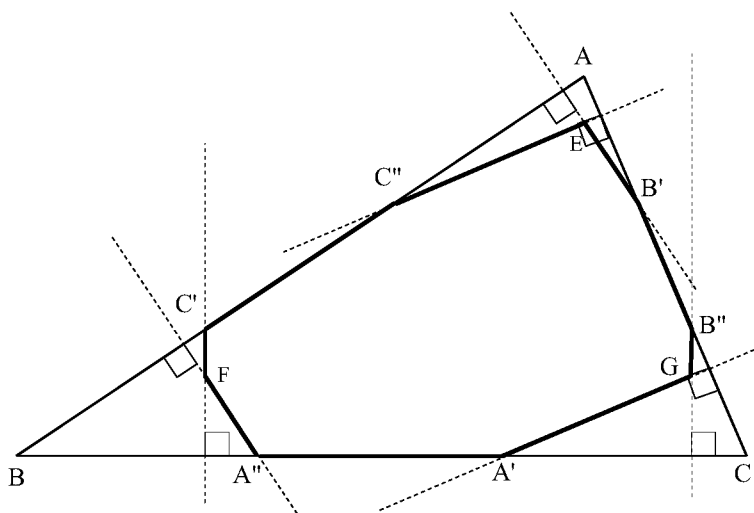
(A traiter par les candidats de la **série S**)

Enoncé

Un enneagone

Un enneagone est un polygone à neuf côtés.

On considère la figure suivante dans laquelle $AB' = B'B'' = B''C$;
 $BC' = C'C'' = C''A$ et $BA'' = A''A' = A'C$.



1. Démontrer que la droite (AE) est perpendiculaire à la droite (BC).

De même, la droite (BF) est perpendiculaire à la droite (AC) et la droite (CG) est perpendiculaire à la droite (AB). (On ne demande pas de le démontrer).

On note H le point d'intersection des droites (AE), (BF) et (CG).

2. Quel est le rapport de l'aire de l'enneagone (A'A''FC'C''EB'B''G) à celle du triangle (ABC) ?

Solution

1.

- Les points A, C'' et B sont alignés dans cet ordre.
Les points A, B' et C sont alignés dans cet ordre.
 $\frac{AC''}{AB} = \frac{1}{3} = \frac{AB'}{AC}$.
D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (B'C'') et (BC) sont parallèles.
- E est l'orthocentre du triangle (AB'C'') car les droites (B'E) et (C''E) sont, par construction, deux hauteurs de ce triangle. (AE) est la troisième hauteur de ce triangle, donc $(AE) \perp (B'C'')$.
- $\left\{ \begin{array}{l} (AE) \perp (B'C'') \\ (B'C'') \parallel (BC) \end{array} \right.$. On en déduit que $(AE) \perp (BC)$.

2.

- Les points A, C'' et B sont alignés.
Les points A, E et H sont alignés.
(BH) // (C''E) car elles sont toutes les deux perpendiculaires à (AC).
D'après le théorème de Thalès, $\frac{AE}{AH} = \frac{AC''}{AB} = \frac{1}{3}$.
- Le quadrilatère (AC''EB') est donc une réduction de rapport $\frac{1}{3}$ du quadrilatère (ABHC).
Donc $\text{aire}(AC''EB') = \frac{1}{9} \text{aire}(ABHC) = \frac{1}{9} [\text{aire}(ABC) - \text{aire}(BHC)]$.
Par un raisonnement analogue, on montre que :
 $\text{aire}(BA''FC') = \frac{1}{9} \text{aire}(BCHA) = \frac{1}{9} [\text{aire}(ABC) - \text{aire}(AHC)]$
 $\text{aire}(CB''GA') = \frac{1}{9} \text{aire}(CAHB) = \frac{1}{9} [\text{aire}(ABC) - \text{aire}(AHB)]$.
Par addition, il vient :
$$\begin{aligned} \text{aire}(AC''EB') + \text{aire}(BA''FC') + \text{aire}(CB''GA') \\ &= \frac{1}{9} [3 \times \text{aire}(ABC) - \text{aire}(BHC) - \text{aire}(AHC) - \text{aire}(AHB)] \\ &= \frac{1}{9} [3 \times \text{aire}(ABC) - \text{aire}(ABC)] = \frac{2}{9} \text{aire}(ABC). \end{aligned}$$

L'aire de l'ennéagone (A'A''FC'C''EB'B''G) est complémentaire de l'aire précédente dans le triangle (ABC).

On en déduit : $\text{aire}(A'A''FC'C''EB'B''G) = \frac{7}{9} \text{aire}(ABC)$.

Exercice n° 3

(A traiter par les candidats des séries **autres que S**)

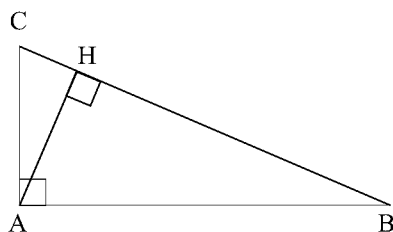
Énoncé

Volumes

ABC est un triangle rectangle en A. H est le pied de la hauteur issue de A.

On note V_A le volume du solide obtenu en faisant tourner le triangle autour de la droite (BC), V_B le volume du solide obtenu en faisant tourner le triangle autour de la droite (CA) et V_C le volume du solide obtenu en faisant tourner le triangle autour de la droite (AB).

On rappelle que le volume d'un cône de révolution de rayon R et de hauteur h est $\frac{\pi R^2 h}{3}$.



1. Représenter à main levée sur trois schémas distincts chacun des solides ainsi obtenus.

2. On admet que V_A est le plus petit des trois nombres V_A , V_B et V_C .
Démontrer qu'un triangle dont les côtés ont pour longueurs $\frac{1}{V_A}$, $\frac{1}{V_B}$ et $\frac{1}{V_C}$ est un triangle rectangle.

Solution

Question 1 : schémas non reproduits ici

Question 2 :

V_A est le plus petit des trois nombres positifs V_A , V_B et V_C , donc $\frac{1}{V_A}$ est le plus grand des nombres $\frac{1}{V_A}$, $\frac{1}{V_B}$ et $\frac{1}{V_C}$.

Répondre à la question posée revient donc à montrer que :

$$\left(\frac{1}{V_B}\right)^2 + \left(\frac{1}{V_C}\right)^2 = \left(\frac{1}{V_A}\right)^2$$

et à conclure par la réciproque du théorème de Pythagore.

$\left(\frac{1}{V_A}\right)^2 = \left(\frac{3}{\pi AH^2 (BH + HC)}\right)^2 = \frac{9}{\pi^2 AH^4 BC^2}$ car le solide de volume V_A est la réunion de deux cônes de révolution de hauteurs respectives BH et HC .

$$\left(\frac{1}{V_B}\right)^2 = \left(\frac{3}{\pi AB^2 AC}\right)^2 = \frac{9}{\pi^2 AB^4 AC^2};$$

$$\text{de même } \left(\frac{1}{V_C}\right)^2 = \frac{9}{\pi^2 AC^4 AB^2}.$$

$$\left(\frac{1}{V_B}\right)^2 + \left(\frac{1}{V_C}\right)^2 = \frac{9}{\pi^2 AB^4 AC^2} + \frac{9}{\pi^2 AC^4 AB^2} = \frac{9(AB^2 + AC^2)}{\pi^2 AC^4 AB^4}.$$

ABC est un triangle rectangle en A ; d'après le théorème de Pythagore, $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

D'autre part, $\frac{AB \times AC}{2} = \frac{BC \times AH}{2}$. (Il s'agit de deux expressions de l'aire du triangle ABC).

D'où $AB^4 \times AC^4 = BC^4 \times AH^4$.

Il vient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{V_B}\right)^2 + \left(\frac{1}{V_C}\right)^2 &= \frac{9(AB^2 + AC^2)}{\pi^2 AC^4 AB^4} = \frac{9BC^2}{\pi^2 BC^4 AH^4} \\ &= \frac{9}{\pi^2 BC^2 AH^4} = \left(\frac{1}{V_A}\right)^2. \end{aligned}$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, un triangle de longueur de côtés $\frac{1}{V_A}$, $\frac{1}{V_B}$ et $\frac{1}{V_C}$ est un triangle rectangle.