

$\geq 2 \times 3$: contradiction.

2. oui dans les deux cas : $5 + 3 = 4 \times 2 \times 1$ et $5 + 4 + 3 = 6 \times 2 \times 1$.

3. en s'inspirant des cas $n = 5, 6$ et 7 , on distinguera n pair et n impair : si $n = 2k$, $P = \{1, k-1, 2k\}$ convient car la somme des éléments de $\mathcal{S}$ vaut alors $\frac{2k(2k+1)}{2} - (1 + (k-1) + 2k) = 2k(k-1)$, et si $n = 2k+1$, $P = \{1, k, 2k\}$ convient car la somme des éléments de $\mathcal{S}$ vaut alors $\frac{(2k+1)(2k+2)}{2} - (1 + k + 2k) = 2k^2$. Ceci ne s'applique pas à $n = 4$, car alors $k-1 = 1$, le même nombre ne peut appartenir deux fois à $\mathcal{P}$.

COMMENTAIRE de F. Lo Jacomo

Cet exercice favorise une démarche empirique : essais, tâtonnements, conjectures, ... toujours à développer.

Il réclame - c'est excellent - une bonne appropriation de l'énoncé. Progressif, il est relativement aisé.

DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 4)

ÉNONCÉ

Le tournoi des n nations

On considère un entier $n \geq 3$.

Dans un tournoi des n nations, chaque nation joue avec les $n-1$ autres. Le classement se fait selon le nombre de matchs gagnés (un match ne peut être que gagné ou perdu). En cas d'égalité, le classement se fait en regardant le nombre de points marqués.

Faire le grand chelem, c'est gagner tous ses matchs. Obtenir la cuiller de bois, c'est perdre tous ses matchs.

1. Existe-t-il des tournois pouvant donner ces scores ?

Tournoi des 6 nations		
Equipes	Victoires	Défaites
A	5	0
B	4	1
C	4	1
D	1	4
E	1	4
F	0	5

Tournoi des 5 nations		
Equipes	Victoires	Défaites
A	3	1
B	3	1
C	2	2
D	1	3
E	1	3

2. Démontrer que les entiers n pour lesquels il existe un tournoi où le vainqueur a autant de victoires que de défaites sont des entiers impairs.

3. Pour quelles valeurs de n existe-t-il des tournois où le second compte plus de défaites que de victoires ?

4. Pour quelles valeurs de n existe-t-il des tournois où l'on peut faire un classement des trois premiers sans avoir à regarder le nombre de points marqués ?

5. Pour quelle valeur minimale de n existe-t-il des tournois où l'on peut faire un classement des trois premiers sans avoir à regarder le nombre de points marqués, sachant qu'il n'y a pas eu de grand chelem ?

« ÉLÉMENTS DE SOLUTION »

2. Dans un tournoi opposant n équipes, chaque équipe joue $n-1$ matchs, et le nombre total de matchs joués est $\frac{n(n-1)}{2}$. Une équipe ne peut donc compter autant de victoires que de défaites que si l'effectif est impair. C'est possible pour tout effectif impair distinct de 1, il suffit que chacune des $2p-1$ équipes gagne contre les suivantes dans la liste $(1, 2, 3, \dots, p, \dots, 2p-1)$.

3. Supposons que le vainqueur ait gagné tous ses matchs, et limitons l'effectif à ses adversaires vaincus. Le second peut alors compter, vis-à-vis de ses successeurs, autant de victoires que de défaites, et donc au total une victoire de moins que le nombre de ses défaites, conformément à la question précédente, si l'effectif amputé du premier est impair, donc si l'effectif total est pair (et ça commence à 2...).

Si l'effectif total est le nombre impair $2n+1$, le second a gagné au plus

$n - 1$ matchs, il en est de même de ses successeurs. Nous connaissons donc les vainqueurs de $2n(2n - 1)$ matchs et comme le premier en a gagné au plus $2n$, le nombre total de victoires est au plus $2n^2$. C'est trop peu pour un tournoi qui comporte $2n^2 + n$ matchs.

4. Oublions la condition « les trois premiers » et demandons que le classement s'établisse intégralement en fonction du seul nombre de victoires : des nombres de victoires, tous différents et inférieurs à $n - 1$, dont la somme est $\frac{n(n - 1)}{2}$, il n'y a pas tellement le choix : si chaque équipe a battu toutes celles qui la suivent au classement, nous y sommes. Ce modèle idéal peut naturellement supporter quelques permutations. La chose est donc possible pour tout effectif supérieur ou égal à 3.

5. Les nombres de victoires des trois premiers sont au plus $n - 2$, $n - 3$ et $n - 4$. n est donc supérieur ou égal à 4. Il y a donc au moins une quatrième équipe. Son nombre de victoires est au plus $n - 5$. Il y a donc au moins une cinquième équipe. Il n'est pas possible que les deux dernières équipes n'aient aucune victoire : elles ont joué l'une contre l'autre, $n - 5$ est donc non nul, et il y a une sixième équipe. A six équipes, le nombre de victoires est au plus $4 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 = 12$ victoires pour 15 matchs... A sept équipes, il est $5 + 4 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 = 18$ pour 21 matchs. Il ne reste plus qu'à construire un tableau possible pour huit équipes, nombre minimal cherché. Pour obtenir le même résultat avec un effectif plus élevé, ajouter une équipe qui gagne la cuiller de bois et donner une victoire supplémentaire aux autres.

SOLUTION PLUS DÉTAILLÉE de F. Lo Jacomo

1. Si A gagne tous ses matchs, il gagne en particulier ceux contre B et C. Dans le match opposant B et C, l'une des équipes perd, et comme elle a également perdu contre A, elle totalise au moins deux défaites : il est exclu que ces deux équipes n'aient qu'une défaite chacune.

Par contre, le score du tournoi des 5 nations est réalisable de plusieurs manières. L'une des équipes A ou B perd son match contre l'autre (par exemple, A perd contre B), et doit gagner tous ses autres matchs. Dans cette hypothèse, si B perd contre C, B doit gagner tous ses autres matchs et, parmi les trois matchs opposant C, D et E, chaque équipe doit en gagner un (C gagne contre D, D contre E et E contre C, ou bien C gagne contre E, E contre D et D contre C). Si B gagne contre C, C

doit gagner ses deux autres matchs restants (contre D et E), et parmi les trois matchs opposant B, D, E, chaque équipe doit en gagner un. En tout, quatre tournois distincts fournissent le même score final.

2. Comme, pour toute équipe, la somme du nombre de défaites et du nombre de victoires est égale au nombre de matchs, donc à $n - 1$, il est clair que n doit être impair pour que, ne fût-ce qu'une équipe, ait autant de victoires que de défaites. Réciproquement, considérons un polygone régulier dont les n sommets symbolisent chacun une équipe, et appelons O le centre du cercle. On suppose que l'équipe A gagne contre l'équipe B si et seulement si l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est compris entre 0 et π . Un tel tournoi est possible puisque pour toute paire d'équipes, on peut déterminer le vainqueur, et il est clair que chaque équipe gagne contre la moitié des autres équipes (celles situées du bon côté de la droite (OA)), donc chaque équipe (en particulier le vainqueur) totalise autant de victoires que de défaites.

3. Considérons un tournoi de type ci-dessus, et ajoutons une équipe qui, elle, réalise le grand chelem : elle est première et toutes les autres équipes (en particulier le second) totalisent plus de défaites que de victoires. Ce score est donc réalisable pour tout n pair. Si par contre $n = 2k + 1$, le vainqueur totalise plus $2k$ victoires (grand chelem). Le second, donc chacune des $2k$ autres équipes, totalise moins de victoires que de défaites, donc au plus $(k - 1)$ victoires. La somme des victoires ainsi totalisées est $\leq 2k + 2k(k - 1) = 2k^2$, ce qui est absurde car il y a en tout $(2k + 1)k$ matchs, donc autant de victoires.

4. Tous les n au moins égaux à 3. Considérons trois équipes A, B et C telles que A gagne contre toutes les équipes (grand chelem), B gagne contre toutes les équipes sauf A, et C gagne contre toutes les équipes sauf A et B. N'importe quel score entre les $(n - 3)$ autres équipes permet de réaliser un tel tournoi, et ces $(n - 3)$ autres équipes auront chacune au plus $(n - 4)$ victoires alors que A, B et C auront respectivement $(n - 1)$, $(n - 2)$, $(n - 3)$ victoires : cela permet de déclarer A premier, B deuxième et C troisième sans regarder le nombre de points ni les scores des autres équipes.

5. C'est possible pour tout $n \geq 8$, et la valeur minimale est 8. En effet, le vainqueur A doit totaliser au plus $(n - 2)$ victoires, le second B, au

plus $(n-3)$, le troisième C, au plus $(n-4)$ et chacune des $(n-3)$ autres équipes au plus $(n-5)$ victoires, ce qui fait un nombre total de victoires au plus égal à $(n-2) + (n-3) + (n-4) + (n-5)(n-3) = n^2 - 5n + 6$.

Or il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ matchs, donc autant de victoires. On doit donc avoir :

$n^2 - 5n + 6 \geq \frac{n(n-1)}{2}$, donc $n^2 - 9n + 12 \geq 0$, ce qui n'est vérifié, n

étant entier, que pour $n \leq 1$ (absurde) ou pour $n \geq 8$. Réciproquement, si $n \geq 8$, (n entier), considérons quatre équipes A, B, C et D telles que A gagne tous ses matchs sauf contre D, B gagne tous ses matchs sauf contre A et D, C gagne tous ses matchs sauf contre A, B et D, et D perd tous ses matchs sauf contre A, B et C. On suppose que dans le sous-tournoi entre les $(n-4)$ autres équipes, aucune ne fait le grand chelem, ce qui est facile à réaliser : plaçons les équipes sur un cercle parcouru dans un sens, et posons que chaque équipe perd contre l'équipe qui la suit immédiatement, donc chaque équipe perd au moins un match quel que soit le résultat des autres matchs. Dès lors, chacune des $(n-4)$ autres équipes marque au plus $(n-6)$ victoires dans ce sous-tournoi, plus une victoire contre D, soit au plus $(n-5)$ victoires. Les trois premières équipes sont donc A, B et C avec $(n-2)$, $(n-3)$ et $(n-4)$ victoires, à condition que D, avec ses trois victoires, n'en fasse pas partie, donc que $n-4 > 3$, ce qui confirme la condition $n \geq 8$.

COMMENTAIRES de F. Lo Jacomo

Ce second sujet académique a les mêmes vertus que le premier... sauf en sa longueur.

Il était d'actualité⁶, un certain nombre de personnes avaient dû s'interroger sur tous les scores possibles à l'occasion du tournoi des six nations. Mais il me semble un peu long : c'était peut-être nécessaire pour départager les meilleurs de l'académie qui présentait le plus de candidats et où se trouvaient les meilleurs lauréats nationaux ? Ou au contraire, cet exercice sur le tournoi a-t-il découragé certains candidats qui, de ce fait, ont eu plus de temps sur les exercices nationaux ?

ANNEXES

1. Participation

1266 candidats, dans 102 lycées (l'académie compte 140 lycées (géné-

⁶NDLR. et il va le redevenir !

raux, technologiques ou polyvalents) publics et 57 lycées privés).

Il y a eu 884 présents (dont un garçon de seconde), une fille et 17 garçons de STI, 271 filles et 593 garçons de 1^{ère} S. En tout 273 filles et 611 garçons.

2. Suite des corrections

Les copies non primées sont retournées corrigées à leurs auteurs, accompagnées d'une fiche de correction, qui est en usage depuis la première année du concours. (voir en fin des annexes).

3. Palmarès

Quatre copies sont soumises à l'examen du jury national, celles de nos quatre premiers prix.

- 1 Igor KORTCHEMSKI lycée Blaise Pascal (Orsay - 91)
- 2 Arnaud de MESMEY lycée franco-allemand (Buc - 78)
- 3 Samuel LELLOUCH lycée Descartes (Antony - 92)
- 4 Pierre LARRAUFIE lycée E. Mounier (Chatenay-Malabry - 92)

Deux palmarès régionaux distinguent des candidats qui seront récompensés par les Syndicats d'aménagement des villes nouvelles, CERGY-PONTOISE et SAINT-QUENTIN en YVELINES (18 au total, qui n'étaient pas classés parmi les 25 premiers).

Voici quelques autres lauréats :

Prix

- 5 Kevin WEBSTER lycée international (St Germain en Laye - 78)
- 6 Thibaud HERVIER lycée St Erembert (St Germain en Laye - 78)
- 7 Rémi LEBLOND lycée Lakanal (Sceaux - 92)
- 8 Oana SEVERIN lycée Alain (Le Vésinet - 78)

Accessits

- 9 Ludwig CHAUDESAYGUES lycée Alain (Le Vésinet - 78)
- 10 Pierre HELIES lycée L. de Broglie (Marly le roi - 78)
- 11 Sylvain MUSEAUX lycée Ste Marie (Antony - 92)
- 12 Alexandre NICOLAS lycée Ste Marie (Antony - 92)
- 13 Diana HIENARD lycée Daniélou (Rueil Malmaison - 92)
- 14 Michel BLOCKELET lycée Hoche (Versailles - 78)
- 15 Jérôme ISSENMANN lycée Hoche (Versaille - 78)