

VERSAILLES

PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 3)

ÉNONCÉ

Un entier $n \geq 2$ est dit *académique* si on peut répartir les entiers $1, 2, \dots, n$ en deux groupes disjoints $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}$, de sorte que la somme des nombres du groupe $\mathcal{S}$ est égale au produit des nombres du groupe $\mathcal{P}$.

Exemple : le nombre 7 est académique car $2 + 4 + 5 + 7 = 1 \times 3 \times 6$.

1. Prouver que $n = 4$ n'est pas académique.

2.a. Le nombre 5 est-il académique ?

b. Le nombre 6 est-il académique ?

3. Prouver que, pour tout entier $n \geq 7$, le nombre n est académique.

« ÉLÉMENTS DE SOLUTION »

On sait écrire, sous la forme d'un produit, la somme des entiers compris entre 1 et n : $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(n+1)n}{2}$. La question revient donc à ôter quelques entiers inférieurs ou égaux à n à chaque membre de cette égalité, de façon que le second puisse être écrit comme un produit de facteurs inférieurs ou égaux à n , différents et ne figurant pas dans le (nouveau) premier membre. On sera pour cela amené à distinguer les cas n pair et n impair, pour éliminer la (fâcheuse) division par 2 qui figure dans l'égalité de départ.

Si on note S_n la somme des entiers naturels ou égaux à n , on trouve (en tâtonnant...) : $S_{2p+1} - 2p + p - 1 = (2p) \times p \times 1$ (qui exige $p > 1$ donc $n = 3$) et $S_{2p} - (p-1) - 2p - 1 = 2p \times (p-1) \times 1$ (qui exige $p-1 > 1$ donc $n > 4$).

SOLUTION de F. Lo Jacomo

Soit N la valeur commune du produit des éléments de $\mathcal{P}$ et de la somme des éléments de $\mathcal{S}$.

1. Si 4 était dans $\mathcal{P}$, le produit N , multiple de 4 au plus égal à $1 + 2 + 3 = 6$, ne pourrait donc être que 4, donc 2 et 3 seraient dans $\mathcal{S}$, or $2 + 3 > 4$: contradiction. Donc 4 est dans $\mathcal{S}$: pour que le produit $N \geq 4$, il faut que $\mathcal{P}$ contienne 2 et 3 auquel cas la somme est $\leq 4 + 1$ et le produit