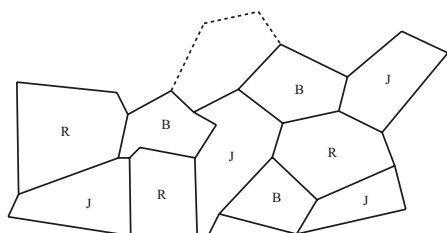
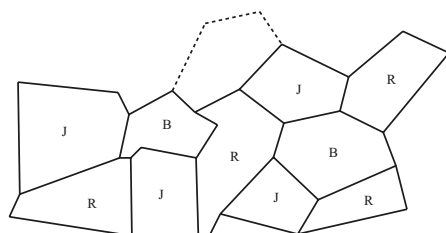


les cas « possible » et « impossible »). Il faut donc choisir pour couleur commune du Tarn et de l'Ariège la couleur attribuée au Gers, ce qui laisse globalement 6 coloriages possibles de la carte de 11 départements.



Un cas possible



Un cas impossible

## COMMENTAIRES

### 1. De l'équipe académique

Exercice très souvent abordé. Le jury a particulièrement observé la qualité des raisonnements pour un exercice qui peut être posé bien avant la classe de première. Le jury a été attentif à la cohérence des deux dénombrements, à la nature du raisonnement pour la question 3) où une condition nécessaire et suffisante est attendue.

### 2. De F. Lo Jacomo

Exercice distrayant et très simple.

### 3. De l'équipe « brochure »

Bravo ! et à donner aussi bien avant la Première, comme il est dit ci-dessus !

## DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 4)

### ÉNONCÉ

#### Drôles de suites

La suite de chiffres :  $\{1 ; 3 ; 4 ; 7 ; 1 ; 8 ; 9 ; 7 ; \dots\}$  est obtenue comme suit :

- i) On choisit deux chiffres comme premiers termes (ici 1 puis 3).
- ii) à partir du troisième terme, on écrit, en suivant, le chiffre des unités de la somme des deux premiers termes précédents (par exemple  $4 + 7 = 11$ . Ainsi le chiffre 1 succède à 4 ; 7).

Ceci détermine une suite de chiffres.

- 1) Montrer que cette suite est périodique et déterminer sa période (le plus petit nombre de termes consécutifs qui se répètent à l'identique).
- 2) On s'intéresse aux suites définies de cette manière à partir de deux chiffres comme premiers termes. Chaque couple définit une suite.
  - a) Montrer que la donnée de deux termes consécutifs quelconques  $a$  et  $b$  d'une telle suite détermine complètement les termes suivants *et également ceux qui précèdent*.
  - b) Quels sont les deux premiers termes de la suite obtenue par les procédés i) et ii) et telle que le 2003<sup>e</sup> terme vaut 6 et le 2004<sup>e</sup> terme vaut 8 ?
- 3) Montrer que, quels que soient les deux premiers termes de la suite, celle-ci est périodique.

### SOLUTION de l'équipe académique

1) La mise en oeuvre de l'algorithme de calcul des termes de la suite conduit à :

$$\underbrace{1; 3; 4; 7; 1; 8; 9; 7; 6; 3; 9; 2; 1; 3; \dots}_{12 \text{ termes}}$$

On s'arrête à la première rencontre de la cellule 1 ; 3 car alors la suite va se répéter à l'identique car *deux termes consécutifs de la suite déterminent les suivants de façon unique*. La période est donc 12.

2)a) Il est commode d'utiliser la notation indicée des suites  $(u_n)_{n \geq 1}$ . L'algorithme de calcul des termes de la suite se traduit par la relation de récurrence, valide pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$u_{n+2} = \begin{cases} u_{n+1} + u_n & \text{si } u_{n+1} + u_n < 10 \\ u_{n+1} + u_n - 10 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit  $p$  quelconque, supposons  $u_{p+1}$  et  $u_{p+2}$  connus et démontrons que  $u_p$  est alors déterminé de façon unique.

On a soit  $u_{p+2} = u_{p+1} + u_p$ , auquel cas  $u_p = u_{p+2} - u_{p+1}$ , ce qui suppose  $u_{p+2} - u_{p+1} \geq 0$ , soit  $u_{p+2} = u_{p+1} + u_p - 10$  et alors  $u_p = u_{p+2} - u_{p+1} + 10$ , ce qui suppose que  $u_{p+2} - u_{p+1} < 0$ .

$$\text{Ainsi } u_p = \begin{cases} u_{p+2} - u_{p+1} & \text{si } u_{p+2} - u_{p+1} \geq 0 \\ u_{p+2} - u_{p+1} + 10 & \text{sinon} \end{cases}$$

b) Une première idée est de faire fonctionner l'algorithme rétrograde trouvé à la question précédente :

| $n$   | 2004 | 2003 | 2002    | 2001    | 2000       | 1999       |
|-------|------|------|---------|---------|------------|------------|
| $u_n$ | 8    | 6    | $8-6=2$ | $6-2=4$ | $2-4+10=8$ | $4-8+10=6$ |

La cause est entendue : la suite est périodique de période 4. Donc  $u_1 = u_{2001-4 \times 500} = u_{2001} = 4$  et  $u_2 = u_{2002} = 2$  pardi.

3) On va utiliser un « principe » célèbre inventé, semble-t-il par Peter Gustav Dirichlet (1805-1859), qui s'énonce très simplement : si  $n+1$  objets doivent être rangés dans  $n$  boîtes, alors au moins une boîte contient au moins 2 objets. En français, on l'appelle « *principe des tiroirs* », en anglais « *principe du pigeonier* »

Considérons donc une suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  du type étudié dans l'exercice et considérons les 202 premiers termes de cette suite. Avec ces termes on forme 101 couples de termes consécutifs  $(u_1, u_2), (u_3, u_4), \dots, (u_{201}, u_{202})$ . Chaque élément de la suite est un entier compris entre 0 et 9, donc chaque couple ne peut prendre que  $10 \times 10$  valeurs. On a donc 101 objets (les couples) et 100 boîtes (valeurs possibles). Il existe au moins une boîte contenant deux objets, donc il existe au moins deux couples consécutifs égaux dans la suite des 202 premiers termes. Si c'est le premier couple  $(u_1, u_2)$  qui est répété, la démonstration est achevée, sinon on utilise l'algorithme rétrograde de la question 2)a) : la donnée d'un couple quelconque de la suite détermine les termes précédents. En remontant la suite à partir des couples répétés, on trouve les mêmes termes, donc on trouvera aussi répétés les deux premiers termes, ce qui achève la démonstration de la périodicité.

### COMPLÉMENT DE LA QUESTION 3, par F. Lo Jacomo

Arithmétiquement, il est possible de préciser la période, même si ce n'était pas demandé. Notons  $f(x)$  le chiffre des unités de l'entier  $x$ . Pour tout  $n$ ,  $u_{n+2} = f(u_{n+1} + u_n)$ ,  $u_{n+3} = f(u_{n+2} + u_{n+1}) = f(2u_{n+1} + u_n)$ ,  $u_{n+4} = f(3u_{n+1} + 2u_n)$ , ... et par récurrence  $u_{n+k} = f(F_k u_{n+1} + F_{k-1} u_n)$ , où  $F_k$  est le  $k$ -ième terme de la suite de Fibonacci définie par  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  et pour tout  $k$ ,  $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ . Le premier terme de cette suite de Fibonacci qui soit multiple de 10 est  $F_{15} = 610$ , et l'on a  $F_{14} = 377$ . Donc pour tout  $n$ ,  $u_{n+15} = f(610.u_{n+1} + 377.u_n) = f(7.u_n)$ . Il en résulte que  $u_{n+30} = f(49.u_n) = f(9.u_n)$  et  $u_{n+60} = f(81.u_n) = u_n$  : pour toute

suite et tout indice  $n$ ,  $u_{n+60} = u_n$ , ce qui signifie que la période de la suite divise 60, mais non pas qu'elle est égale à 60.

En effet, si  $u_n$  et  $u_{n+1}$  sont tous deux pairs, le premier terme de la suite de Fibonacci qui soit multiple de 5 est  $F_5 = 5$ , et le raisonnement ci-dessus montre que  $u_{n+5} = f(3.u_n)$  donc que  $u_{n+20} = u_n$ . Si  $u_n$  et  $u_{n+1}$  sont tous deux multiples de 5, le premier terme de la suite de Fibonacci qui soit multiple de 2 est  $F_3 = 2$ , ce qui conduit à  $u_{n+3} = u_n$ . Et d'après les premières questions du problème, la suite peut avoir pour période 4 ou 12, sans compter la période 1 pour la suite identiquement nulle.

Si  $u_n$  est pair et  $u_{n+1}$  est impair,  $u_{n+2}$  est impair,  $u_{n+3}$  pair et  $u_{n+4}$  impair : un terme sur trois est pair, donc la période est multiple de 3. De même si  $u_n$  est impair et  $u_{n+1}$  pair ou  $u_n$  et  $u_{n+1}$  tous deux impairs.

Si  $u_n$  est multiple de 5, mais pas  $u_{n+1}$ ,  $u_{n+2} = f(u_{n+1} + u_n)$ ,  $u_{n+3} = f(2.u_{n+1} + u_n)$ ,  $u_{n+4} = f(3.u_{n+1} + 2.u_n)$  et  $u_{n+6} = f(8.u_{n+1} + 5.u_n)$  ne sont pas non plus multiples de 5, alors que  $u_{n+5} = f(5.u_{n+1} + 3.u_n)$ , lui, est divisible par 5. Plus généralement, un terme sur 5 est multiple de 5, donc la période  $p$  est obligatoirement multiple de 5. Si, par contre, aucun des quatre nombres  $u_n, u_{n+1}, u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$ , et  $u_{n+3} = u_n + 2.u_{n+1}$  n'est multiple de 5, soit  $u_n = u_{n+1}$  modulo 6 auquel cas  $u_{n+1}$  est multiple de 5, soit ces quatre nombres sont distincts modulo 5 et leur somme vaut  $1 + 2 + 3 + 4 = 0$  modulo 5, donc  $3u_n + 4.u_{n+1}$  est divisible par 5, ou encore :  $u_{n+1} = 3.u_n$  modulo 5. En outre, comme quatre termes consécutifs sont distincts modulo 5,  $u_{n+4}$  et  $u_n$  sont égaux modulo 5, et plus généralement les seuls termes égaux à  $u_n$  modulo 5 sont les  $u_{n+4k}$  : la période est donc multiple de 4.

En résumé, les seules suites dont la période n'est pas multiple de 5, hormis celles dont tous les termes sont multiples de 5 (de période 1 ou 3), sont celles dont aucun terme n'est multiple de 5, leur période est multiple de 4 et diviseur de 60, elle ne peut être que 4 ou 12. Ces suites vérifient pour tout  $n$  :  $u_{n+1} = 3.u_n$  modulo 5, et si les termes ne sont pas tous pairs, la période est, en outre, multiple de 3, donc égale à 12. Si les termes sont tous pairs, deux termes consécutifs ne peuvent être que (2; 6), (4, 2), (6, 8) ou (8, 4), on retrouve la suite (...2,6,8,4,2,6,...) de période 4. Si les termes ne sont pas tous pairs, deux termes consécutifs doivent être (1, 3), (1, 8), (2, 1), (3, 4), (3, 9), (4, 7), (6, 3), (7, 1), (7,

6), (8, 9), (9, 7) ou (9, 2) : on retrouve la suite  $(\dots, 1, 3, 4, 7, 4, 8, 9, 7, 6, 3, 9, 2, 1, 3, \dots)$  de la première question.

Toute autre suite a une période multiple de 5, et multiple de 3 si si les termes ne sont pas tous pairs. Par ailleurs, si  $u_n$  n'est pas multiple de 5,  $u_{n+5} = 5.u_{n+1} + 3.u_n = 3.u_n$  modulo 5,  $u_{n+10} = 4.u_n$  modulo 5 et  $u_{n+15} = 2.u_n$  modulo 5 sont trois nombres distincts de  $u_n$  modulo 5, la période ne peut donc pas être 5, 10 ou 15, elle ne peut pas non plus être 30 car  $u_{n+30} = 4.u_n$  modulo 5, elle est nécessairement 20 ou 60 (seuls autres multiples de 5 qui divisent 60).

En définitive, il existe

- une suite de période 1, contenant un seul couple  $u_n = u_{n+1} = 0$ .
- une suite de période 3, contenant 3 couples  $(u_n, u_{n+1} : (5, 5), (5, 0)$  et  $(0, 5)$ .
- une suite de période 4, contenant les 4 couples  $(u_n, u_{n+1})$  dont les termes sont tous deux pairs et vérifient  $u_{n+1} = 3.u_n$  modulo 5.
- une suite de période 12, contenant les 12 couples distincts  $(u_n, u_{n+1})$  dont les termes ne sont pas tous deux pairs mais vérifient  $u_{n+1} = 3.u_n$  modulo 5
- une suite de période 20, contenant les 20 couples distincts  $(u_n, u_{n+1})$  dont les termes tous pairs ne vérifient pas  $u_{n+1} = 3.u_n$  modulo 5
- une suite de période 60, contenant les 60 couples  $(u_n, u_{n+1})$  restants (dont les termes ne sont pas tous pairs et ne vérifient pas  $u_{n+1} = 3.u_n$  modulo 5).

En effet, on retrouve ainsi les  $1 + 3 + 4 + 12 + 20 + 60 = 100$  couples  $(u_n, u_{n+1})$  *a priori* possibles.

## COMMENTAIRES

### 1. de l'équipe académique

L'exercice permettait d'agir en calculant les premiers termes, ce que les candidats ont fait pour la première et la deuxième question ; les raisonnements du 2a) et du 3) sont rarement obtenus. Une seule copie approche la résolution de la dernière question sous une forme acceptable.

### 2. de F. Lo Jacomo et l'équipe « brochure »

Exercice sur un thème assez classique, mais ouvert et très intéressant.

Une jolie application du principe des tiroirs...

Peut-être pourrait-on se poser d'abord la question : combien existe-t-il de valeurs possibles pour un couple de deux termes consécutifs ?

L'exercice venait en quatrième position : cela a dû peser sur le résultat.

Domage, il est fort joli...

## ANNEXES

### Participation

193 candidats : 101 garçons, 92 filles.

300 élèves étaient inscrits, moins d'absents que l'an passé pour un nombre équivalent d'inscrits.

Les candidats se répartissent sur huit départements : Ariège (13), Aveyron (44), Haute-Garonne (55), Gers (2), Lot (6), Hautes-Pyrénées (19), Tarn (33), Tarn-et-Garonne (6).

La participation d'élèves des séries technologiques est très faible.

| Série    | S      |         | STI    |         | STT    |         |
|----------|--------|---------|--------|---------|--------|---------|
|          | Filles | Garçons | Filles | Garçons | Filles | Garçons |
| Effectif | 92     | 99      | 0      | 2       | 0      | 0       |
| Total    | 191    |         | 2      |         | 0      |         |

### Déroulement

Le sujet posé était convenablement abordable : il a permis à bon nombre de candidats de faire des choses intéressantes. Tous les exercices ont été abordés et les productions des candidats ont été assez abondantes, souvent proches les unes des autres. En particulier les exercices académiques sont bien abordés, ce qui était le but même de leur choix.

**En conclusion**, avec une amélioration générale du contenu des copies, cette quatrième olympiade semble marquer la prise d'un rythme dfe croisière. On ne peut qu'encourager tous les professeurs à exploiter de tels exercices en classe afin de « développer chez les élèves l'initiative et le goût de la recherche ». Maints apprentissages, au-delà de l'acquisition de techniques, peuvent y être acquis.

**Les lauréats**

29 lauréats sont primés au palmarès académique : 14 classés en première valeur et 15 autres récompensés en sus. Ils proviennent de 13 lycées (sur les 112 de l'académie). Tous reçoivent le diplôme des olympiades académiques 2004.

Voici les 5 premiers :

|                       |                  |                                |
|-----------------------|------------------|--------------------------------|
| 1 <sup>er</sup> prix  | Thi-Vong NGUYEN  | Lycée A. Bourdelle (Montauban) |
| 1 <sup>ème</sup> prix | Loïc WAS         | Lycée Lapérouse (Albi)         |
| 3 <sup>ème</sup> prix | Blaise ROBERT    | Lycée Saint Sernin (Toulouse)  |
| 4 <sup>ème</sup> prix | Jessica HERMET   | Lycée A. Bourdelle (Montauban) |
| 5 <sup>ème</sup> prix | Pierre DALMAYRAC | Lycée Bellevue (Albi)          |

Notons l'importance des 29 récompenses : voyages, séjours, vols d'essais, visites, ordinateur,...et, bien sûr, ouvrages multiples (choisis avec discernement!).