

TOULOUSE

PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 1)

ÉNONCÉ et SOLUTION

de l'équipe académique

COLORIAGES

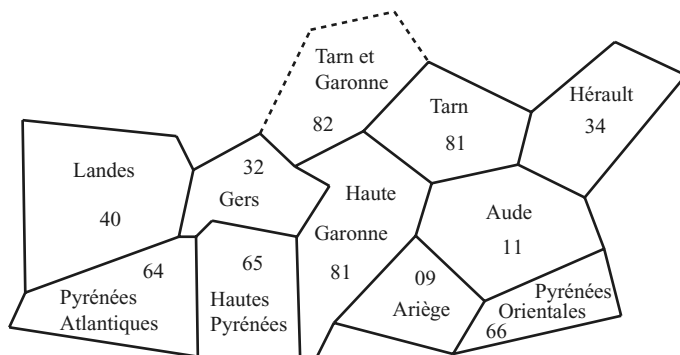
Vous reconnaissez sans doute cette carte de 11 départements du Sud-Ouest de la France, repérés par leur nom et leur numéro.

L'objectif est de colorier cette carte par département à l'aide des trois couleurs Rouge, Jaune et Bleu, couleurs à indiquer par les initiales R, J, B, et ceci en respectant la règle des cartes géographiques :

deux départements voisins doivent être coloriés à l'aide de deux couleurs différentes.

Par exemple, les Pyrénées-Atlantiques (64) et le Gers (32) sont voisins et doivent donc être coloriés à l'aide de couleurs différentes, alors que les Landes (40) et les Hautes-Pyrénées (65) ne le sont pas et peuvent donc être coloriés à l'aide de la même couleur.

Attention : le département du Tarn-et Garonne (82), délimité partiellement en pointillés sur la carte ci-dessous, n'est à prendre en compte que pour la question 4.



1) Colorier la carte de 10 départements avec les trois couleurs en respectant la règle (annexe à rendre avec la copie).

Solution Question très simple. Il suffit d'essayer.

2) a) Démontrer que les Landes et les Hautes-Pyrénées sont nécessairement coloriés de la même couleur.

Solution Les Pyrénées-Atlantiques et le Gers, qui sont voisins des Landes utilisent les deux couleurs autres que celle choisie pour les Landes. Or, les Hautes-Pyrénées sont voisines du Gers et des Pyrénées-Atlantiques, mais pas des Landes : seule la couleur utilisée pour les Landes est envisageable.

b) Qu'en est-il de l'Ariège et du Tarn ?

Solution : L'Ariège et le Tarn ont comme voisins communs la Haute-Garonne et l'Aude ; ces deux départements, étant voisins, sont coloriés de couleurs différentes. L'Ariège et le Tarn ne peuvent être coloriés que par la couleur restante : ils sont donc nécessairement de la même couleur.

3) Combien y a-t-il de façons différentes de colorier la carte de 10 départements à l'aide des trois couleurs en respectant la règle ?

Solution : Il y a 6 possibilités d'attribuer les trois couleurs aux trois départements des Landes, des Pyrénées-Atlantiques et du Gers, puisque ces trois départements, étant mutuellement voisins, utilisent nécessairement les trois couleurs. Ce choix étant fait détermine la couleur attribuée aux Hautes-Pyrénées (Cf.2)a)), puis à la Haute-Garonne. Il y a alors deux choix possibles pour la couleur commune du Tarn et de l'Ariège (Cf. 2)b)). Ce choix étant effectué, la couleur du département de l'Aude est déterminée, ce qui impose ensuite celles des Pyrénées Orientales et de l'Hérault (qui seront nécessairement de la couleur de la Haute-Garonne, donc des Pyrénées-Atlantiques). On a donc $6 \times 2 = 12$ coloriages possibles de la carte de 10 départements avec les trois couleurs Rouge, Jaune et Bleu.

4) On s'intéresse, dans cette question, à la carte de 11 départements (avec le Tarn-et-Garonne repéré par le numéro 82). A quelle condition, portant sur les coloriages précédents de la carte de 10 départements, peut-on colorier cette carte de 11 départements à l'aide des trois couleurs et en respectant la règle ? Combien y a-t-il de coloriages possibles de la carte de 11 départements ?

Solution : Le Tarn-et-Garonne (82) est voisin du Gers, du Tarn et de la Haute-Garonne. Une condition nécessaire et suffisante pour pouvoir compléter la carte de 10 départements supposée coloriée est donc d'avoir une couleur disponible après coloriage des trois départements cités ci-dessus, ce qui revient à dire que le Tarn et le Gers ont la même couleur (voir ci-dessous