

STRASBOURG

PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 2)

ÉNONCÉ

On dit qu'un polygone est *régulier convexe* si :

- tous ses côtés ont même longueur ;
- tous ses angles au sommets ont même mesure ;
- tous les segments joignant deux sommets quelconques sont à l'intérieur du polygone.

On désire étudier la somme $\mathcal{S}$ des distances d'un point M, intérieur à un polygone régulier convexe $\mathcal{P}$, à chaque côté de $\mathcal{P}$.

- 1°) Vérifier que $\mathcal{S}$ est indépendante de M dans le cas où $\mathcal{P}$ est un carré.
- 2°) Étudier le même cas où $\mathcal{P}$ est un triangle équilatéral.
- 3°) Généraliser cette étude au cas où $\mathcal{P}$ est un polygone régulier convexe à n côtés ($n \geq 3$).

SOLUTION

1°) On vérifie facilement que la somme des distances du point M aux côtés du carré vaut $2a$ où a désigne la longueur du côté du carré.

2°) Notons A, B et C les trois sommets du triangle et I, J et K les projetés orthogonaux de M sur [AB], [BC] et [AC] respectivement. L'aire du triangle ABM vaut $\frac{AB \times MI}{2}$. La somme des aires des trois triangles ABM, ACM et BCM est égale à l'aire du triangle ABC, d'où

$$AB \times MI + AC \times MK + BC \times MJ = 2 \text{ Aire}(\text{ABC})$$

On en déduit, puisque le triangle est équilatéral :

$$MI + MK + MJ = \frac{2 \text{ Aire}(\text{ABC})}{a}$$

3°) Pour un polygone régulier convexe, on considère de même la somme des aires des n triangles formés par le point M et deux sommets consécutifs du polygone.