

celle de $x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}$ lorsqu'on considère $x^2 + \frac{bx}{a}$ comme « le début... »

Cela donnait ici $n^4 + n^2 + 1 = \left(n^2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.

Une impasse.

- Qui plus est, une généralisation abusive à partir de ce qui se passe pour $ax^2 + bx + c$ pouvait laisser croire que, puisque $n^4 + n^2 + 1$ s'avère strictement positif quel que soit n , il n'est pas factorisable ! Or il peut l'être à condition qu'aucun des facteurs ne puisse s'annuler, ce qui peut fort bien se produire, ici par exemple, lorsqu'ils sont du second degré. Toutot cela pour dire qu'une question présumée « facile » ne l'est peut-être pas autant qu'on le croirait et peut être déroutante.

2°

- La solution de F. Lo Jacomo est évidemment élégante, rapide et donne l'intelligence du nombre de solutions. Mais comment avoir l'idée de faire intervenir $4(n^2 + n + 1)$ ou $4(n^2 - n + 1)$? Parce que l'énoncé suggère 4 solutions ? Là aussi se méfier des généralisations à d'autres degrés !
- Il me paraît clair que la solution de F. Lo Jacomo est admirable, géniale..., mais qu'elle devra être fort peu attendue...

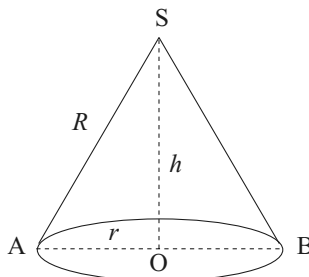
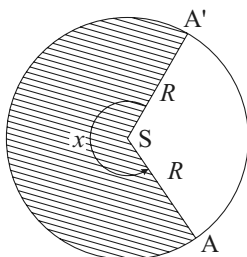
DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 2)

ÉNONCÉ

Le problème du cornet

On fabrique un cornet (cône) dont l'aire latérale est la partie hachurée du disque de rayon R ci-dessous.

Trouver la valeur exacte en radians de l'angle x ($0 < x < 2\pi$) pour que le volume du cône obtenu soit maximal. Quel est le volume maximal en fonction de R ?



SOLUTION 1 - académique-

La longueur de l'arc AA' exprimée de deux façons donne : $2\pi r = Rx$ soit

$$r = \frac{Rx}{2\pi}.$$

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle SOA rectangle en O,

$$\text{on a : } h^2 = R^2 - r^2 = R^2 - \frac{R^2 x^2}{4\pi^2} = \frac{R^2(4\pi^2 - x^2)}{4\pi^2} \text{ d'où :}$$

$$h = \frac{R}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 - x^2}$$

Le volume du cône est donné par la formule :

$$V(x) = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{\pi}{3} \times \frac{R^2 x^2}{4\pi^2} \times \frac{R}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 - x^2} \text{ soit } V(x) = \frac{R^3}{24\pi^2} x^2 \sqrt{4\pi^2 - x^2}$$

V est dérivable sur $]0, 2\pi[$ et on a :

$$V'(x) = \frac{R^3}{24\pi^2} \left(2x\sqrt{4\pi^2 - x^2} + x^2 \frac{-2x}{2\sqrt{4\pi^2 - x^2}} \right) = \frac{R^3 x}{24\pi^2} \times \frac{8\pi^2 - 3x^2}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}$$

$$V'(x) = \frac{R^3 x (2\pi\sqrt{2} - x\sqrt{3}) (2\pi\sqrt{2} + x\sqrt{3})}{24\pi^2 \sqrt{4\pi^2 - x^2}}$$

D'où le tableau de variation :

x	0	$\frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$	2π	
$V'(x)$	0	+	0	-
$V(x)$	0	$V_{\max}$		0

La dérivée V' étant positive sur l'intervalle $\left] 0, \frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right[$, puis négative

sur l'intervalle $\left] \frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 2\pi \right[$, la fonction V admet un maximum pour

$$x = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Pour $x = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ (radians), le volume du cône obtenu est maximal.

Le volume maximal ainsi obtenu est :

$$V_{max} = \frac{R^3}{24\pi^2} \times \frac{8\pi^2}{3} \times \sqrt{4\pi^2 - \frac{8\pi^2}{3}}, \text{ soit } V_{max} = \frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}}, \quad V_{max} = \frac{2\pi R^3 \sqrt{3}}{27}$$

SOLUTION 2 de F. Lo Jacomo

Dans le triangle rectangle AOS, $r^2 + h^2 = R^2$, donc le volume du cône vaut $\frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi(R^2 - h^2)h}{3}$; ce volume est maximal lorsque $R^2 h - h^3$ est maximal.

Comme la dérivée $R^2 - 3h^2$ s'annule pour $h = \frac{R}{\sqrt{3}}$ - soit $r = R\sqrt{\frac{2}{3}}$ - et devient négative c'est en cette valeur que la fonction atteint son maximum. Or le périmètre du cône vaut $2\pi r = xR$. Le volume est maximal pour $x = \pi\sqrt{\frac{8}{3}}$ (soit $\approx 294^\circ$), et il vaut alors $\frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}}$

COMMENTAIRES

1. de l'équipe académique : 22 candidats seulement (sur 117) connaissaient le volume du cône et parmi eux, 2 ont trouvé l'expression $V(x)$, mais malheureusement le calcul de la dérivée $V'(x)$ n'a pas abouti.

2. de F. Lo Jacomo « Ce second exercice me semble encore plus élémentaire que le premier. »

3. De Henri Bareil

- Cet exercice me semble de difficulté « normale », la méthode adoptée étant « naturellement » celle de l'équipe académique : l'énoncé interrogeant sur x il est usuel de tout régler sur x , donc de calculer $V(x)$, etc. Or si la démarche est limpide, elle est assez longue.

- F.Lo Jacomo, lui, ignore royalement x au départ et se préoccupe alors simplement du cône. Ce qui lui vaut un calcul infiniment plus rapide (et plus sûr!).

- La comparaison des deux méthodes vaut pour tous les « choix d'inconnues » Usuellement, on prend comme « inconnue(s) » ce qui fait l'objet de la question posée. Et tout l'apprentissage scolaire conforte généralement dans cette idée. Or là ne devrait pas être le critère essentiel du choix : il devrait rechercher bien plutôt comment traduire au mieux, en s'y tenant au plus près, la condition imposée.

- *Remarque sur la recherche du maximum de $V(x)$ - méthode 1*

On connaît le théorème élémentaire, facile à démontrer, et qui peut fréquemment intervenir, selon lequel « si deux nombres positifs ont une somme constante, leur produit est maximum quand ces nombres sont égaux - ou s'approchent le plus possible de l'égalité - ». Or ce théorème est généralisable à un produit de plus de deux facteurs. [autre application analogue en page 10 du 2^{ème} sujet national]

Prenons la partie variable de $V(x)$, à savoir $v = x^2\sqrt{4\pi^2 - x^2}$. v est maximum avec $v^2 = x^2 \times x^2 \times (4\pi^2 - x^2)$ ou encore avec $x^2 \times x^2 \times (8\pi^2 - 2x^2)$ qui relève du théorème évoqué :

le maximum a lieu pour $x^2 = x^2 = 8\pi^2 - 2x^2$, c'est-à-dire $3x^2 = 8\pi^2$.

Etc.

STATISTIQUES

« Cette quatrième année, dit l'équipe académique, confirme le succès de l'épreuve : 117 présents (contre 134 l'an dernier) »

ÉLÈVES PRIMÉS

Adrien MONTFAUCON, lycée François 1^{er}, Le Havre
Grégoire VERNIQUET, lycée Corneille, Rouen.