

ROUEN

PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 1)

ÉNONCÉ

1°) Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur à 2, $n^4 + n^2 + 1$ n'est pas premier.

2°) Démontrer que $n^4 + n^2 + 1$ est un multiple de 7 si le reste de la division euclidienne de n par 7 est égal à 2, 3, 4 ou 5.

SOLUTION 1 - Académique

$$\begin{aligned} 1^\circ) \quad n^4 + n^2 + 1 &= (n^4 + 2n^2 + 1) - n^2 = (n^2 + 1)^2 - n^2 \\ &= (n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1). \end{aligned}$$

Pour $n \geq 2$, $n^2 - n + 1 = n(n - 1) + 1$, $n(n - 1) + 1 \geq 2 \times 1 + 1$ soit $n^2 + n + 1 \geq 3$.

Ainsi, pour $n \geq 2$, $n^4 + n^2 + 1$ n'est pas premier.

2°) a) Si $n = 7k + 2$ (k entier naturel), on peut écrire d'après 1°) :

$$\begin{aligned} n^4 + n^2 + 1 &= (49k^2 + 28k + 4 + 7k + 2 + 1)(49k^2 + 28k + 4 - 7k - 2 + 1) \\ &= (49k^2 + 35k + 7)(49k^2 + 24k + 3) \\ &= 7(49k^2 + 5k + 1)(7k^2 + 21k + 3) \text{ multiple de } 7 \end{aligned}$$

b) Si $n = 7k + 3$ (k entier naturel), on peut écrire d'après 1°) :

$$\begin{aligned} n^4 + n^2 + 1 &= (49k^2 + 42k + 9 + 7k + 3 + 1)(49k^2 + 42k + 9 - 7k - 3 + 1) \\ &= (49k^2 + 49k + 13)(49k^2 + 35k + 7) \\ &= 7(7k^2 + 49k + 13)(49k^2 + 5k + 1) \text{ multiple de } 7 \end{aligned}$$

c) Si $n = 7k + 4$ (k entier naturel), on peut écrire d'après 1°) :

$$\begin{aligned} n^4 + n^2 + 1 &= (49k^2 + 56k + 16 + 7k + 4 + 1)(49k^2 + 56k + 16 - 7k - 4 + 1) \\ &= (49k^2 + 63k + 21)(49k^2 + 49k + 13) \\ &= 7(7k^2 + 9k + 3)(49k^2 + 49k + 13) \text{ multiple de } 7 \end{aligned}$$

d) Si $n = 7k + 5$ (k entier naturel), on peut écrire d'après 1°) :

$$\begin{aligned} n^4 + n^2 + 1 &= (49k^2 + 70k + 25 + 7k + 5 + 1)(49k^2 + 70k + 25 - 7k - 5 + 1) \\ &= (49k^2 + 77k + 31)(49k^2 + 63k + 21) \\ &= 7(49k^2 + 77k + 31)(7k^2 + 9k + 3) \text{ multiple de } 7 \end{aligned}$$

Conclusion

Si le reste de la division euclidienne de n par 7 est égal à 2, 3, 4 ou 5, le nombre $n^4 + n^2 + 1$ est un multiple de 7.

SOLUTION 2 de F. Lo Jacomo

1°) $n^4 + n^2 + 1 = (n^2 + 1)^2 - n^2 = (n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)$. Pour tout entier ≥ 2 , $n^2 + n + 1 > n^2 - n + 1 = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq 3$: produit de deux entiers tous deux supérieurs ou égaux à 3, $n^4 + n^2 + 1$ ne peut pas être premier.

2°) $n^4 + n^2 + 1$ est divisible par 7 si $(n^2 + n + 1)$ ou $(n^2 - n + 1)$ est divisible par 7, donc si $4(n^2 + n + 1) = (2n + 1)^2 + 3 = (2n - 1)(2n + 3) + 7$ est divisible par 7 ou si $4(n^2 - n + 1) = (2n + 1)(2n - 3) + 7$ est divisible par 7, donc en définitive si l'un des quatre entiers $2n - 1, 2n + 3, 2n + 1, 2n - 3$ est divisible par 7, ou encore si n s'écrit $7q + 4, 7q + 2, 7q + 3$ ou $7q + 5$. Par contre, si n s'écrit $7q, 7q + 1$ ou $7q - 1$, aucun des entiers $2n - 1, 2n + 3, 2n + 1, 2n - 3$ n'est multiple de 7, donc aucun des entiers $n^2 + n + 1, n^2 - n + 1$ n'est multiple de 7 donc $n^4 + n^2 + 1$ n'est pas multiple de 7.

COMMENTAIRES**1. de l'équipe académique :**

« Seulement 10 candidats (sur 117) ont trouvé la factorisation et, parmi eux, 3 ont pensé à l'utiliser dans la deuxième question.

Enviro 80 élèves n'ont pas répondu à la 1^{ère} ou à la 2^{ème} question. Parmi les réponses fausses, on retrouve souvent des pseudo-arguments utilisant la parité et la généralisation à partir d'exemples »

2. de F. Lo Jacomo

Exercice simple. Au 2°, tel qu'était rédigé l'énoncé, la réciproque n'était pas demandée. D'ailleurs, on peut raisonner par équivalences, mais ce n'est pas une mauvaise chose de dissocier systématiquement une implication de sa réciproque, même dans les cas évidents comme celui-ci.

Le raisonnement que j'ai proposé suppose connu que si $4a$ est divisible par 7, a est divisible par 7, mais sans cela, je ne vois guère d'autre possibilité que d'essayer systématiquement tous les cas $n = 7q + r$, ce qui ne permet pas de comprendre pourquoi il y a quatre solutions et non pas trois ou cinq.

3. de Henri Bareil

1°

• Je suppose qu'il a dû être essayé une voie de factorisation induite par