

RENNES

PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 1)

ÉNONCÉ

Le grand mathématicien Léonhard Euler est né à Bâle le 15 avril 1707. Il meurt plus d'un demi-siècle plus tard à Saint Petersburg en laissant une œuvre mathématique considérable. Dans une vie qui aura duré moins d'un siècle, il aura eu le temps de s'intéresser à l'analyse (l'essentiel de ses travaux), à l'algèbre, à la géométrie, à la théorie des nombres, aux probabilités, sans parler de la physique et de la philosophie auxquelles il a consacré quelques articles.

Il meurt le 18 septembre à un âge qui n'est divisible ni par 3, ni par 5, ni par 7.

L'année qui suit sa mort est une année bissextile dont la somme des chiffres est divisible par 5.

A quel âge est mort Euler ? Quel jour de la semaine ?

Rappel

- Sont bissextiles les années divisibles par 4 à l'exception des années divisibles par 100 et non divisibles par 400.
- Une année normale a 365 jours et une année bissextile en a 366.

SOLUTION

Euler est mort à l'âge de 76 ans le jeudi 18 septembre 1783.

1- Le texte nous dit qu'il a vécu plus de 50 ans et moins de 100 ans. Compte tenu de ses dates de naissance et de décès, il est donc mort entre 1757 et 1807. Les années bissextiles entre ces deux années et la somme de leurs chiffres sont donc :

Année	1760	1764	1768	1772	1776
Somme	14	18	22	17	21

Année	1780	1784	1788	1792	1796	1804
Somme	16	20	24	19	23	13

La seule année qui convienne est donc 1784 et il est mort en 1783 à l'âge de 76 ans.

Remarque : les données étaient redondantes et on n'avait guère besoin de savoir comment se comportait l'âge par rapport à 3, 5 ou 7. Dans ce genre d'épreuve type olympiades, les élèves sont également jugés sur cette capacité à trier les informations essentielles (Attention : il suffit de remplacer 50 par 40 et on a trois dates qui répondent au critère utilisé : 1748, 1752 et 1784).

2- Pour trouver le jour du décès, on choisit un point de départ - *certains on choisi leur date anniversaire, d'autres une date particulière ou tout simplement la date du jour* -. On a pris le parti de prendre, pour remonter le temps, la date du **24 mars 2004 qui était un mercredi**.

Le raisonnement prend appui sur le principe suivant : **lorsqu'on rajoute à un jour de la semaine une semaine (ou 7 jours), on retombe sur le même jour de la semaine**.

Il suffit alors de compter le nombre de jours depuis le 18 septembre 1783 jusqu'au 24 mars 2004 en tenant compte des années bissextiles :

- Du 18/09/1783 au 31/12/1783 : **104 jours** (le 18/09 non compté).

- Du 1/1/1784 au 31/12/2003,

il y a parmi 220 années 53 années bissextiles

4 années bissextiles de 1783 à 1800

24 années bissextiles de 1801 à 1900

25 années bissextiles de 1901 à 2003

ce qui donne donc : $220 \times 365 + 53 = \mathbf{80\ 353\ jours}$

- Du 1/1/2004 au 24/03/2004 : **84 jours**

D'où un total de **80 541 jours soit 11 505 semaines et 6 jours**

Ceci joue à reculons à partir d'un mercredi non compté.

Par conséquent, Euler est mort un jeudi

VARIANTE, pour le choix du point de départ et la gestion des décalages annuels.

Du 18/09/1883 au 31/12/1783 inclus, il y a 105 jours, c'est-à-dire 15 semaines exactement en comptant le 18/09. Donc le 18/09/1883 et le 01/01/1784 sont le même jour de la semaine.

Comme $365 = 7 \times 52 + 1$, une année normale entraîne un jour de décalage. Une année bissextile entraîne 2 jours de décalage d'une année sur l'autre. Entre le 1/1/1784 et le 31/12/2003, il y a 53 années bissextiles (1800 et 1900 ne le sont pas, mais 2000 l'est).

Ce qui fait $220 + 543 = 273$ jours de décalage. $273 = 7 \times 39$ donc on est exactement à 39 semaines de décalage, donc le 1^{er} janvier 2004 et le

1^{er} janvier 1784 tombent un même jour.

Comme le 1^{er} janvier 2004 était un jeudi, Euler est décédé le jeudi 18 septembre 1783.

COMPLÉMENTS ET VARIANTES par F. Lo Jacomo

Pour calculer le jour de la semaine d'une date donnée, on additionne quatre nombres :

- un nombre qui définit le siècle : 0 pour les XVI^e, XX^e, ... siècles, 6 pour les XVII^e, XXI^e, ... siècles, 4 pour les XIX^e, XXIII^e ... Depuis 1582 (calendrier grégorien), 400 ans contiennent un nombre entier de semaines.
- un égal à l'année plus le quart de l'année (arrondi à l'entier inférieur) : 83 donne $83 + 20 = 103$.
- un correspondant au mois : janvier (non bissextile) = 0, février (non bissextile) = 3 (janvier bissextile = -1 et février bissextile = 2), mars = 3, avril = 6, mai = 1, juin = 4, juillet = 6, août = 2, septembre = 5, octobre = 0, novembre = 3, décembre = 5. En pratique, on mémorise une fois pour toutes le suite "0, 3, 3, 6, 1, 4, 6, 2, 5, 0, 3, 5" et on compte sur ses doigts pour trouver le nombre associé au mois. On remarquera que certains nombres apparaissent plus que d'autres, ce qui explique que certaines années ont plus de vendredis 13 que d'autres.
- et le quantième (jour du mois).

La somme donne, modulo 7, le jour de la semaine, compte tenu que 0 = dimanche, 1 = lundi, etc.

Pour le 18 septembre 1783, on obtient : $4 + (83 + 20) + 5 + 18 = 130$, soit 4 modulo 7 : jeudi. Pour le 24 mars 2004, on a : $6 + (4 + 1) + 3 + 24 = 38$, soit 3 modulo 7 : mercredi. Cette vérification est conseillée car même quand on connaît la méthode, on ne l'utilise pas fréquemment.

Cela dit, si on ne connaît pas la méthode, il faut compter : soit d le jour de la semaine du 18 septembre 1783 (0 = dimanche, 1 = lundi, ...). Entre le 18 septembre 1783 et le 18 septembre 2003, il y a 220 années, dont un quart sont bissextiles hormi 1800 et 1900, soit 53 années bissextiles, donc $220 \times 365 + 53$ jours. Or $365 = (52 \times 7) + 1 = 1$ modulo 7, donc le jour de la semaine du 18 septembre 2003 vaut, modulo 7 : $d + 220 + 53d$ modulo 7 (273 est divisible par 7). Entre le 18 septembre 2003 et le 18