

2. de l'équipe « brochure » : voilà un exercice éblouissant qui réclame pas mal d'astuce et beaucoup de réflexion. En devoir de recherche, il sera facilité par une expérimentation sur des paquets de cartes, d'où il naîtra des résolutions de plus en plus affinées, comme celle, superbe, du corrigé ci-dessus.

DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 3)

ÉNONCÉ

Les bougies

Vous souhaitez acheter n bougies identiques et les utiliser selon le programme suivant :

- le premier soir, vous faites brûler une bougie pendant une heure ;
- le second soir, vous faites brûler deux bougies pendant une heure et ainsi de suite jusqu'à ce que...
- le n -ième soir, vous faites brûler les n bougies pendant une heure.

Vous voulez qu'au terme de cette heure de combustion du n -ième soir, toutes les bougies soient entièrement consumées.

Donner une condition nécessaire sur n et sur la durée de combustion d'une bougie pour que ce programme soit réalisable.

Si cette condition est vérifiée, montrer que le programme est réalisable en donnant une méthode de choix des bougies à faire brûler chaque jour.

SOLUTION

Le nombre total d'heures de combustion en n jours est $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Si k est la durée de combustion d'une bougie, le programme

ne peut se réaliser que si : $\frac{n(n+1)}{2} = kn$; n doit donc être impair, $n = 2p + 1$, et la durée de combustion d'une bougie est $k = p + 1$ heures. Si cette condition est réalisée, on numérote les bougies de 1 à $2p + 1$, et on fait brûler la bougie 1 le premier jour, les bougies 2 et 3 le deuxième jour, et on recommence à la bougie 1 après la bougie $2p + 1$.

A la fin du jour $2p$, n_1 bougies ont brûlé s heures et n_2 ont brûlé $s + 1$ heures. On a donc : $n_1 + n_2 = 2p + 1$ et, d'après le calcul initial du nombre d'heures de combustion en $n = 2p + 1$ jours : $n_1 s + n_2 (s + 1) = p(2p + 1)$. Donc $p(2p + 1) = (2p + 1)s + n_2$.

Il en résulte que n_2 est divisible par $2p + 1$. Puisque $n_2 \leq 2p + 1$, soit $n_2 = 0$, soit $n_2 = 2p + 1$.

Dans ce dernier cas, $n_1 = 0$ et $s = p - 1$. Toutes les bougies ont brûlé $p - 1$ heures, ce qui donne $p(2p + 1) = (2p + 1)(p - 1)$.

Impossible.

C'est donc que $n_2 = 0$, donc $s = p$. Les bougies ont brûlé p heures chacune à la fin du jour $2p$ et donc $p + 1$ heures (leur durée de vie) à la fin du jour $2p + 1$.

COMMENTAIRES

1- de l'équipe académique :

« Exercice assez peu abordé, dont l'énoncé semble ne pas avoir été bien compris par de nombreux candidats. La condition nécessaire est cependant obtenue dans quelques copies, mais qu'elle soit suffisante n'est correctement montré dans aucune. »

2- de l'équipe "brochure" :

Intéressant, l'exercice provoque des réactions contrastées, tantôt jugé « immédiat », aux difficultés de rédaction près, tantôt presque aussi exigeant que le premier. Comme lui, il gagnerait à pouvoir bénéficier d'une « expérimentation » conduisant d'abord à de solides conjectures.

ANNEXES

Participation

Lycée	Présents			Inscrits
	Filles	Garçons	Total	
Vauban (Givet)	1	3	4	7
Bazeilles (Sedan)	4	4	8	9
Mazaryk (Vouziers)	5	13	18	21
Monge (Charleville)	4	11	15	16
Marie de Champagne (Troyes)	8	14	22	24
L. Bourgeois (Epernay)	1	1	2	5
Clémenceau (Reims)	10	49	59	787
St Exupéry (St Dizier)	8	10	18	30
Total	41	105	146	190

Palmarès 7 primés dont :

1^{er} Prix Vianney Coste Malle - Lycée Vauban (Metz)

2^e Prix : Alexandra Gérard - ESTIC (Saint Dizier)

3^e Prix : Sébastien Gilles Lycée Bazeilles (Sedan)