

REIMS

PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 2)

ÉNONCÉ

La carte restante

On réalise la manipulation suivante avec une pile de n cartes numérotées de 1 à n , la carte du dessus portant le numéro 1, la suivante le numéro 2, ...

On prend la première carte de la pile, on la met à la dernière place de la pile, on prend la carte suivante et on la retire du jeu, on renouvelle ces opérations jusqu'au moment où il ne reste plus qu'une carte dans le paquet.

On se demande quel est le numéro de la carte restante.

Répondre à la question si n est une puissance de 2, puis dans le cas général.

Quelles sont les valeurs de n telles que la carte restante porte le numéro treize ?

SOLUTION

Supposons n de la forme $n = 2^k$. La carte numérotée 1 revient au-dessus du paquet après enlèvement de toutes les cartes de numéro pair, et on est ramené au même problème avec 2^{k-1} cartes. Pour $n = 2$, la carte restante porte le numéro 1. C'est donc la carte numérotée 1 qui est la carte restante quand $n = 2^k$.

Si $n = 2^k + p$, avec $0 \leq p < 2^k$, c'est-à-dire $2^k \leq n < 2^{k+1}$, on obtient un tas de 2^k cartes après avoir enlevé p cartes, et la carte au-dessus porte le numéro $2p + 1$. C'est la carte restante.

Si la carte restante porte le numéro 13, le nombre de cartes est $n = 2^k + 6$ avec $6 < 2^k$, soit $k \geq 3$, d'où n égal à 14, ou 22, ou 38, ou 70, etc.

COMMENTAIRE

1. de l'équipe académique : le cas des puissances de 2 est souvent correctement traité, le cas général n'est bien fait dans aucune copie.