

$$L = \frac{R-r}{e} \times \pi (2r + R - r - s),$$

$$\text{d'où : } L.e = \pi (R-r)(R+r-e) = \pi (R^2 - r^2) - \pi (R-r)e,$$

$$\text{d'où : } (L + \pi (R-r))e = \pi (R^2 - r^2)$$

$$\text{d'où enfin : } e = \frac{\pi (R^2 - r^2)}{L + \pi (R-r)} \approx 0,020\,846.$$

Conclusion : l'épaisseur du papier peut être évaluée à **environ 2 dixièmes de millimètre**.

Remarque : il n'est pas surprenant que les deux démarches précédentes conduisent à des résultats différents, dans la mesure où elles utilisent des modèles différents de la situation ; le fait que les résultats soient très voisins peut être considéré comme un élément de validation, bien insuffisant à lui seul, de ces modèles.

COMMENTAIRE (rédaction de la brochure)

Un exercice agréable rendu instructif par les deux modèles.

DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE

ÉNONCÉ

Pour avoir le résultat de la division de 9 801 par 9, il suffit de lire le nombre « à l'envers » : 1089. Stupéfiant, non ? Aussi appellerons-nous nombre *stupneufiant* un entier naturel divisible par 9 possédant cette propriété.

1) Montrer qu'un nombre *stupneufiant* possède les deux propriétés suivantes :

- a) Il est divisible par 9^2 .
- b) Il commence par 9 et se termine par 1.

2)a) Y a-t-il des nombres *stupneufiants* à 2 chiffres ? à 3 chiffres ?

b) Y a-t-il d'autres nombres *stupneufiants* à 4 chiffres que 9 801 ?

c) Trouver l'unique nombre *stupneufiant* à 5 chiffres.

3) a) Pouvez-vous trouver une méthode de construction d'entiers *stupneufiants* dont le nombre de chiffres est égal à 6, 7, 8, etc. ?

b) Pour un nombre de chiffres fixé, y a-t-il toujours un nombre *stupneufiant* unique ?

SOLUTION : « correction synthétique »

Remarque préliminaire : Tout nombre *stupneufiant* ne se termine pas par 0. En effet, soit le nombre *stupneufiant* s'écrivant $a_n a_{n-1} \cdots a_0 0$ avec $a_n \neq 0$. De l'égalité $a_n a_{n-1} \cdots a_0 0 = 9 \times a_2 a_3 \cdots a_n$ on déduit $a_n = 0$, ce qui est impossible. Cela signifie qu'un nombre *stupneufiant* a autant de chiffres que son quotient par 9.

1) a) Un nombre *stupneufiant* étant divisible par 9, la somme des ses chiffres est un multiple de 9. Il en sera de même pour le nombre lu à l'envers, qui est donc également divisible par 9. **Tout nombre *stupneufiant* est donc divisible par 9^2**

b) Soit $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1$ un nombre *stupneufiant*. On a : $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 = 9 \times a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n$.

Il apparaît ainsi que $9 \times a_1$ augmenté d'une éventuelle retenue ne doit pas générer de retenue, sans quoi $9 \times a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n$ n'aurait pas le même nombre de chiffres que $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1$, ce qui est impossible (remarque préliminaire). Cela signifie que $a_1 = 1$ (à partir de $a_1 = 2$ il y a une retenue) par conséquent, $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1$ doit se terminer par 1, ce qui implique $a_n = 9$.

2) a) Si $a_2 a_1$ est un nombre *stupneufiant*, d'après 1)b), ce ne peut être que 91. Or ce dernier nombre n'étant pas *stupneufiant*, **il n'existe pas de nombre *stupneufiant* à deux chiffres**. Si maintenant $a_3 a_2 a_1$ est un nombre *stupneufiant*, il est nécessairement égal à $9a_2 1$ (question 1)b)). Ce dernier étant divisible par 9, on a $a_2 = 8$. Et comme 981 n'est pas un nombre *stupneufiant*, **il n'existe aucun nombre *stupneufiant* à trois chiffres**.

b) Soit $9a_3 a_2 1$ un nombre *stupneufiant*. Etant divisible par 9, on a nécessairement $a_2 + a_3 = 8$ ou $a_2 + a_3 = 17$ (égalités (1)). Par ailleurs, puisque $9 \times 1a_2 a_3 9 = 9a_3 a_2 1$, $9 \times a_2 +$ une éventuelle retenue ne génère pas de retenue (remarque préliminaire). Par conséquent $a_2 = 0$ ou $a_2 = 1$. Si $a_2 = 0$, compte tenu des égalités (1), on retrouve 9801. Si $a_2 = 1$, alors $a_3 = 7$ (égalités (1)). Or 9721 n'est pas un nombre *stupneufiant*. **Le seul nombre *stupneufiant* à quatre chiffres est donc 9801**.

c) Il n'est pas demandé de vérifier l'unicité. On peut vérifier que 98 901 est *stupneufiant*. C'est donc le seul s'écrivant avec 5 chiffres. Un

raisonnement analogue au précédent permet d'établir l'unicité.

3) a) Partons de la remarque que $9\,801/81=121$ et que $98\,901/81=1221$. Il semble alors naturel de penser que $\overline{12\dots 21} \times 81$ sera *stupneufiant*. En effet $\overline{12\dots 21} \times 9 = \overline{109\dots 989}$ et $\overline{109\dots 989} \times 9 = \overline{989\dots 901}$. Et il est par ailleurs aisé de vérifier que $\overline{989\dots 901}$ est un nombre *stupneufiant*. **Donc tout nombre de la forme $\overline{12\dots 21} \times 81$ est *stupneufiant*.**

b) La réponse est non. Il existe (au moins) deux nombres *stupneufiants* s'écrivant avec 8 chiffres : 98 999 901, obtenu avec la méthode du 3)a) et 98 019 801 obtenu par concaténation de 9 801.

VARIANTE de F. Lo Jacomo

Variantes rédactionnelles, surtout pour les 1 et 2a) et sauf pour la question 2)c) où F. Lo Jacomo démontre l'unicité en s'appuyant sur la découverte d'une jolie propriété des nombres *stupneufiants* :

b) Parmi les multiples de 81 ayant 4 chiffres, $9801 = 121 \times 81$ est le seul qui commence par 9 et se termine par 1. La dernier chiffre de $a \times 81$ étant égal au dernier chiffre de a , le plus grand multiple de 81 inférieur à 9801 qui se termine par 1 est $111 \times 81 = 8991$, il ne commence pas par 9, et le plus petit multiple de 81 supérieur à 81 qui se termine par 1 est $131 \times 81 = 10611$, il a cinq chiffres.

c) Théoriquement, il faut tester tous les multiples de 81 compris entre 90000 et 99999 qui se terminent par 1 ; il y en a 12. Mais on peut aussi remarquer qu'un nombre *stupneufiant* est obligatoirement divisible par 11. Si

$$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0$$

et $n/9 = a_0 10^k + a_1 \cdot 10^{k-1} + \dots + a_{k-1} 10 + a_k$.

- lorsque k est impair, on additionne ces deux nombres :

$$10n/9 = (a_k + a_0)(10^k + 1) + 10(a_{k-1} + a_1)(10^{k-2} + 1) + \dots + 10^{(k-1)/2}(a_{(k+1)/2} + a_{(k-1)/2})(10 + 1)$$

Tous les $10^{k-2i} + 1$ étant divisibles par $11 = 10 + 1$ si k est impair, $10n/9$ est divisible par 11 donc n est divisible par 11.

- lorsque k est pair, on soustrait ces deux nombres :

$$8n/9 = (a_k - a_0)(10^k - 1) + 10(a_{k-1} - a_1)(10^{k-2} - 1) + \dots + 10^{(k-2)/2}(a_{(k+2)/2} - a_{(k-2)/2})(100 - 1)$$

est, de même, divisible par 11, donc n est divisible par 11.

Parmi les 12 multiples de 81 compris entre 90000 et 99999 qui se terminent par 1 : 1121×81 , 1131×81 , ..., 1231×81 , un seul est multiple de 11 : $1221 \times 81 = 98901$, c'est l'unique nombre *stupneufiant* à 5 chiffres.

3- a) Le fait que la question soit ainsi posée suggère que les nombres *stupneufiants* $9801 = 121 \times 81$ et $98901 = 1221 \times 81$ se généralisent en des nombres *stupneufiants* de 6, 7, 8, ..., k chiffres. On pense bien évidemment à $1222 \dots 221 \times 81 = (111 \dots 111 \times 11) \times (9 \times 9) = 999 \dots 999 \times 99 = 99 \times (10^{k-2} - 1) = 989 \dots 901$. En divisant par 9, on obtient $999 \dots 999 \times 11 = 11 \times (10^{k-2} - 1) = 109 \dots 989$ qui est bien le même nombre lu à l'envers. Donc pour tout $k \geq 2$, $99 \times (10^{k-2} - 1)$ est un nombre *stupneufiant* de k chiffres.

b) Mais ce ne sont pas les seuls nombres *stupneufiants*. Pour $k = 8$, par exemple, à côté du nombre ainsi construit : 98999901, il y a bien évidemment 98019801, qui est lui aussi *stupneufiant*, tout comme, pour $k = 9$, 980198019801, ainsi qu'une infinité d'autres pour plein de valeurs de k .

COMMENTAIRES (équipe brochure)

- Quel joli exercice, progressif, accessible, intéressant et ... surprenant !
- À noter la démonstration, hors énoncé, de la divisibilité par 11 (par F. Lo Jacomo).

ANNEXE

Participation :

77 candidats (contre 156 en 2003)